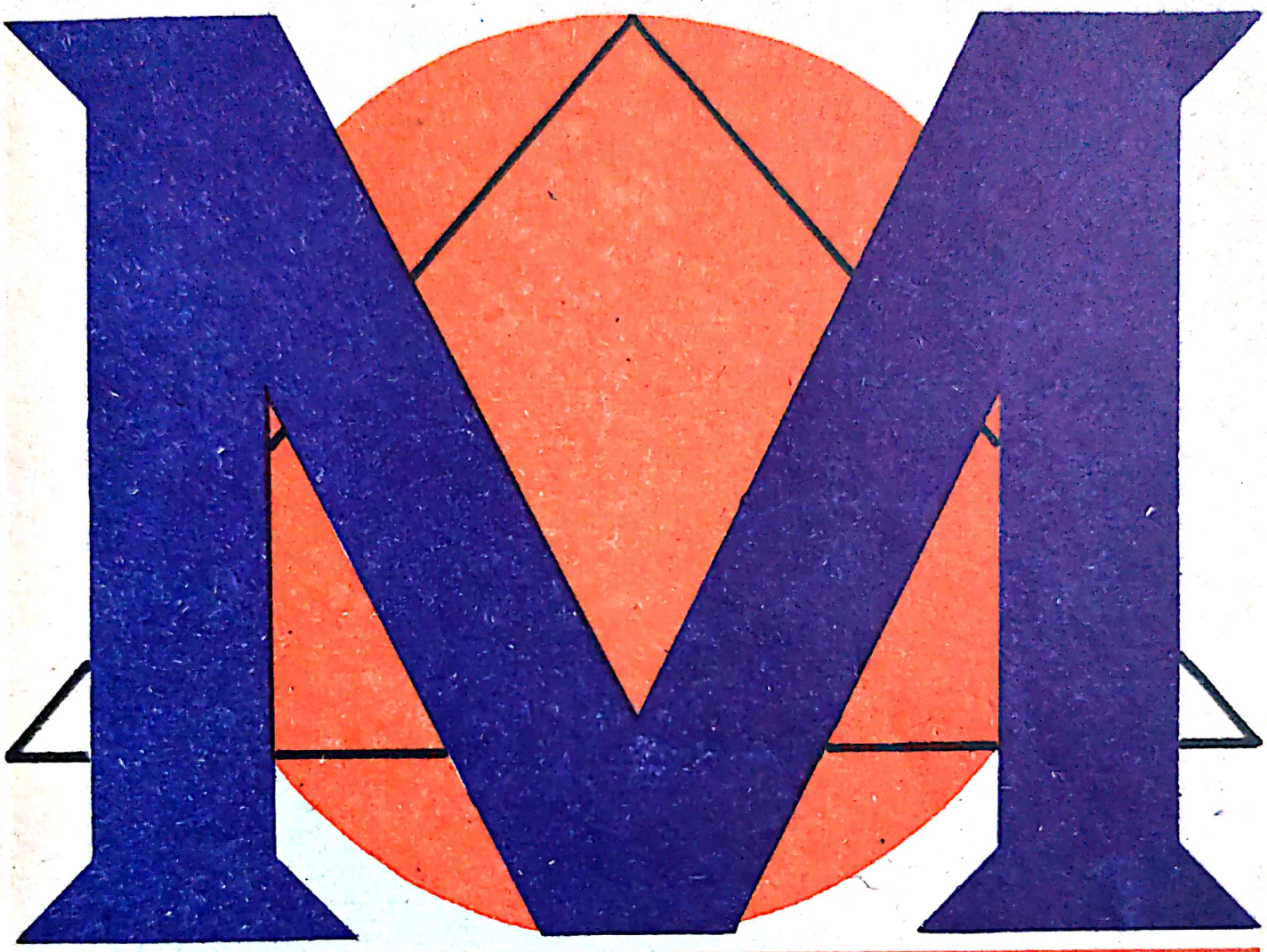
silviu stössel



CULEGERE DE MATEMATICI

PENTRU ADMITEREA IN LICEU

CLASELE VII - VIII

editura cuvîntul românesc

Scanned with OKEN Scanner

SILVIU STÖSSEL

CULEGERE
DE
PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU ADMITEREA IN LICEU

EDITURA „CUVINTUL ROMÂNESC"
BUCUREȘTI - 1991

Scanned with OKEN Scanner

Coperta : EMANUEL-ION RĂDULESCU

ISBN 973-9031-07-2

Scanned with OKEN Scanner

Copiilor mei,
Sebastian și Bogdan

PREFAȚĂ

Lucrarea conține în total 182 probleme din care 85 de algebră, 45 de geometrie plană, 40 de geometrie în spațiu și 12 subiecte date la concursurile de admitere în licee, în anul 1990.

Exercițiile colecționate acoperă o arie vastă a materiei, pentru clasele a-VII-a și a-VIII-a, nivelul de dificultate fiind de la mediu la înalt.

Lucrarea se adresează elevilor care se pregătesc pentru concursurile de admitere în licee și olimpiade. De asemenea, sugerăm profesorilor de gimnaziu, a căror muncă admirabilă merită toată cinstea, să-și aplece atenția asupra acestei cărți.

Vom fi receptivi la observațiile cititorilor asupra acestei lucrări, pe care le așteptăm pe adresa editurii.

Ne facem o datorie de cinste în a menționa numele autorilor de drept ai problemelor din carte.

Țin să mulțumesc tuturor celor care m-au încurajat în scrierea acestui volum și, în primul rînd soției mele Elena, care prin grija față de copii, mi-a oferit timpul necesar acestei încercări.

Exprimăm aici mulțumirile noastre editorului pentru posibilitatea de a tipări această lucrare și pentru condițiile grafice oferite.

Autorul

INDICE DE AUTORI*

Ne facem o datorie de onoare din a prezenta în continuare, lista autorilor de drept ai problemelor din această lucrare.

Bănică Teodor (A 32)
Bene M. (P 32)
Borșai D. (S 4)
Bran Ioan (A 47)
Budescu N. și D. (S 38)
Cheșcă Ion (A 64)
Chiriac Cătălin (P 2)
Cîmpeanu Ioan (A 59)
Coșu Ioan (A 51)
Dan Radu (A 80)
Dinu A. și I. (A 13)
Felea R. (P 33)
Gaiu Laurențiu (P 45)
Hărăbor C. (A 41)
Lascu Mircea (S 35)
Manea Stelian (S 1)
Merenyi Imre (A 35)
Mirea Georgiana (A 63)
Mitrache Ioan (A 39)
Olaru A. (A 64)
Panaitopol Laurențiu (A 79, P 27)
Pătrașcu Ion (S 14)
Pîrșan Liviu (A 5, A 82)
Săvulescu D. (A 2, A 33)
Simion Sebastian (P 31)
Stan Dumitru (P 36)
Bătinețu-Giurgiu D. (A 86)
Boiciuc Gabriel (S 30)
Bostan Gheorghe (P 5, P 87)
Brînzănescu V. (A 42, S 4, S 5, S 28)
Biucliu G. (P 41)
Chioreanu Maria (S 13)
Chiriță Marcel (P 5)
Costea Dragomir (A 66)
Crainic Marius (S 19, S 89)
Diaconu Ioan (A 46, S 27)
Ene Aurel (A 28)
Fota I. (S 37)
Gevelegean Mihai (A 17, S 20)
Iov Gheorghe (S 6)
Ligor Ion (P 45)
Makore Tiberiu (A 29)
Miculița Mihai (S 10)
Mirică Dumitru (A 6)
Neagu Gheorghe (S 18)
Onofraș Eugen (A 23)
Pătrașcu V. (A 74)
Pătroi Dragoș (S 40)
Pîrvănescu Florin (S 21)
Simion Petre (A 37)
Simionov A. (P 11)
Stănășilă Octavian (S 8)

* În paranteză sînt trecute numerele de ordine ale problemelor.

Szoros Alexandru (A 45)
Szoros Mugurel (A 67)
Tilici Emil (A 85)
Tiotoi Ion (A 21)
Tomescu Ioan (P 39)
Țiu C. Ionescu (P 34, P 44)
Ungur Ioan (S 7)
Vizuroiu M. și N. (S 9)
Stossel Silviu (A 1, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 20, 22, 25—27, 30, 31, 34, 44, 48—50, 52—56, 60—62, 68, 69, 71—73, 75—78, P 1, 3, 8, 16, 17, 19, 21, 26, S 24, 25, 31—33)
* * * (A 9, 11, 15, 18, 24, 38, 40, 40, 43, 58, 65, 70, 83, 84, P 4, 6, 7, 9, 10, 12—14, 18, 20, 22—25, 28, 30, 38, 40, 42, 43, S 2, 3, 11, 12, 15—17, 22, 26, 28, 29, 34, 36).

Cu incdicativul * * * se trec problemele foarte cunoscute sau problemele ai căror autori, de-a lungul anilor, au intrat în anonimat.

Scanned with OKEN Scanner

ENUNȚURI

ALGEBRĂ

A 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|3x - 1| = a + 2$

b) $|2x - 1| - |3 - x| = a + 1$

unde $a \in \mathbf{R}$.

A 2. Să se determine $x \in \mathbf{Z}$ astfel încît

$$\sqrt{\frac{3x - 5}{x + 1}} \in \mathbf{Z}$$

A 3. Să se rezolve inecuațiile:

a) $2x + 4 \leqslant x - 3$

b) $|x + 3| \leqslant 5$

c) $|2x - 1| \geqslant 4$

d) $|x| + |x - 1| \leqslant 4$

e) $2|x + 1| - 3|x - 2| \geqslant 3$

A 4. Să se reprezinte grafic:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |x - 1|$

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |x + 2| + 4$

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |2 - x| + x$

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = |x + 1| + |3 - x|$

e) $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = |x - 1| - 2|x - 2|$

A 5. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x(x + 2)(x + 4)(x + 6) + 9 = y^2$$

A 6. a) Să se arate că dacă a, b $\in \mathbf{R}$ astfel încît $a - b = 2$ atunci

$$a^3 - b^3 = 8 + 6ab$$

b) Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{5 + x} - \sqrt[3]{x - 3} = 2$, $x \in \mathbf{R}$

Scanned with OKEN Scanner

A 7. Să se arate că $x^4 + 4x^2 + 4 \geqslant 2x^3 + 8x$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

A 8. Să se rezolve în numere întregi ecuația

$$x^2 + y^2 + 2x = 3$$

A 9. Să se arate că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{-1, 1\}$ și

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n + x_n x_1 = 0$$

atunci n este multiplu de 4.

A 10. Fie $P(X) = 5X^3 + 3X^2 + 2X + 2$. Se știe că $P(X)$ împărțit la $I(X)$ dă restul $3X + 1$. Să se determine $I(X)$, știind că grad $I < 3$.

A 11. Să se simplifice fracția

$$\frac{x^4 + x^2 y^2 + y^4}{(x + y)(x^3 + y^3)}$$

A 12. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \max(3x - 1, 2 - x)$$

A 13. Să se determine numerele întregi n astfel încît numărul

$$n^2 + 9n + 14$$

să fie pătratul unui alt număr întreg

A 14. Să se reprezinte grafic f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \max(\min(3x + 1, 6 - 2x), x + 2)$$

A 15. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{Z}$ și $a, b, \in [0, 1)$ atunci

$$x + a = y + b \Leftrightarrow x = y \text{ și } a = b$$

A 16. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x + 3[x] = \frac{9}{2}$

b) $[x + 1] = 1 - x$

c) $[x + 2] = [3 - x]$

unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

A 17. Să se rezolve ecuația

$$\left[\frac{\left[\frac{3x - 1}{2}\right] + 2}{3}\right] = x - 1$$

A 18. Să se determine funcțiile f, g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ știindă că

$$\begin{cases} 2f(x + 1) + g(x - 1) = 2x + 14, & (\forall)\ x \in \mathbf{R} \\ f(x + 1) - 2g(x - 1) = 6x - 18, & (\forall)\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

A 19. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x - 1| = 3|$

b) $|2x - 1| + |x| = 5$

c) $|x + 1| + |x - 2| = -3$

d) $|x - 1| + |y - 2| = 2$

A 20. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încît:

a) $P(x + 1) + aP(3x - 1) = -68x^2 - 59x + 3$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ unde $P(X) = 4X^2 + 3X + 2$.

b) $P(x) + aP(P(x)) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ unde $P(X) = X^2 + X + a$.

A 21. Fie polinoamele $P(X) = X^6 - 4X^3 + 3$ și $Q(X) = X^6 - 3X^3 + 2$. Să se arate că $P(Q(X))$ se divide cu $X^6 - 3X^3 + 1$.

A 22. Să se rezolve ecuația

$$[2x + 1] + [3 - x] = 4$$

A 23. Să se determine numerele întregi p și q astfel încît ecuațiile

$$(p + 1)x^2 + (2p + 1)x - 2 = 0$$
$$2x^2 + (q + 4)x + 2q = 0$$

să se admită aceleași soluții.

A 24. Fie 1, 2 și, respectiv, -3 resturile împărțirilor polinomului $P(X)$ la $X + 2$, $X + 1$, respectiv, $X - 1$. Să se determine restul împărțirii lui $P(X)$ la $(X + 2)(X + 1)(X - 1)$.

A 25. Există funcții liniare care trec prin punctele A (1, 2), B (2, −1), C (3, 1) și D (5, 4)? Puteți determina o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ al cărui grafic să conțină punctele A, B, C și D?

A 26. Să se reprezinte grafic:

a) $f : (-\infty, 0) \cup (3, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = -x + 2$

b) $f : (-\infty, -1) \cup \{3, 4\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 6$

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

d) $f : [-3, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ x - 1 & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$

A 27. Să se rezolve, în numere naturale, ecuația

$$3(xy + 1) = 5(2x - y + 2)$$

Scanned with OKEN Scanner

A 28. Să se determine numerele $x \in \mathbf{R}$ și $y \in \mathbf{N}$ știind că $x > 1$ și

$$\frac{x}{3} = \frac{5x + 1}{3y + 2}$$

A 29. Să se arate că ecuația $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = y^2 - 2$ nu are soluții în $\mathbf{Z}$.

A 30. Să se rezolve ecuația $x(x^2 - 1)(x + 2) = 360$.

A 31. Să se determine mulțimea

$$A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid y = \frac{5x + 3}{2x - 7} \in \mathbf{Z} \right\}$$

A 32. Se dau polinoamele P și Q cu proprietatea că

$$P(x) = Q(x) + Q(1 - x), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Știind că P are coeficienții naturali și că $P(0) = 0$ să se calculeze $P(P(3))$.

A 33. Fie polinomul $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, unde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. Să se arate că dacă $P(X)$ este divizibil cu $X^2 - 4X - 5$ atunci numărul $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ este divizibil cu 55.

A 34. Fie $f_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_a(x) = (a + 1)x^2 - 3ax + 2a - 1$, unde a este un parametru real diferit de -1. Există punct comun tuturor graficelor funcțiilor f_a, $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$?

A 35. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 - x + 1$, $g(x) = 2ax - 1$, unde a este un parametru real. Cîte puncte comune au graficele funcțiilor f și g?

A 36. Să se determine mulțimile

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 4[\sqrt{x}] + 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 5([\sqrt[3]{x}])^2\}$$

M 37. Arătați că oricare ar fi funcția $f : [a, b] \to [a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ și oricare ar fi $x, y \in [a, b]$ sînt satisfăcute inegalitățile:

a) $ab \leqslant (a + b)f(x) - [f(x)]^2$

b) $a^2 \geqslant a(f(x) + f(y)) - f(x)f(y)$

c) $b^2 \geqslant b(f(x) + f(y)) - f(x)f(y)$

A 38. Se dă $E(x)$ definită astfel

$$E(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3 + \frac{1}{x^3}} \cdot \frac{x^4 + \frac{1}{x^4}}{x^5 + \frac{1}{x^5}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine $E(a)$ știind că a este o rădăcină a ecuației

$$x^2 + 5x + 1 = 0.$$

A 39. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 1$ numărul

$$A = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 (n^2 + 2n - 1) + 3$$

este natural, multiplu de 3.

A 40. Fie a, b, c numere întregi impare. Să se arate că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are rădăcini raționale.

A 41. Să se arate că pentru orice x întreg și orice a, $b \in \mathbf{Z}$ impare, numărul $M = a^2x + 3a^2 - b^2x - 3b^2$ se divide cu 8.

A 42. Fie a, b, $c \in \mathbf{N}$, distincte și mai mari sau egale cu 2. Atunci

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) > \frac{1}{2}$$

A 43. Fiind date două numere reale a, b astfel încît $a + b = 1$ arătați că $a^3 + b^3 \geqslant \frac{1}{4}$.

A 44. Fie $P(X) = X^3 + 2X + a$ și $Q(X) = X^2 + X + b$, cu a, $b \in \mathbf{R}$. Să se determine cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$. Discuție.

A 45. a) Dacă a, b, $c \in \mathbf{R}_+^*$ atunci $a + b + c \leqslant \dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}$

b) Dacă a, b, $c \in \mathbf{R}$ și $a + b + c = 1$ atunci $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc$

c) Dacă a, b, $c \in \mathbf{R}$ și $abc = 1$, atunci $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a + b + c$.

A 46. Fie polinomul $P(X) = X^2 + 40$. Să se demonstreze că dacă a, $b \in \mathbf{N}$, $a > b$, atunci cel puțin unul din numerele $P(a) + P(b)$ sau $P(a) - P(b)$ este diferit de 1 și nu este număr prim.

A 47. Să se afle cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o ia fracția $\dfrac{x-1}{y-1}$, știind că x, $y \in [3, \infty)$ și verifică ecuația

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0.$$

A 48. Fie $P(X) = X^4 + 3X^2 + 3$ și $Q(X) = X^3 - 4X + 1$. Să se determine $I(X)$ știind că restul împărțirii lui $P(X)$ la $I(X)$ este $8X + 23$ și restul împărțirii lui $Q(X)$ la $I(X)$ este $-5X + 11$.

A 49. Fie un polinom $P(X) = 3X^5 + 2X^2 - 3X + 1$. Să se determine restul împărțirii lui $P(X + 2)$ la $X - 1$.

Scanned with OKEN Scanner

A 50. Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(\mathrm{m}) = 2\mathrm{m} + 3$ și $g(\mathrm{m}) = 5 - \mathrm{m}$. Considerînd punctele din plan de coordonate $(f(\mathrm{m}), g(\mathrm{m}))$ puteți determina o funcție $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît toate punctele M să aparțină graficului funcției h?. Dacă da, puteți afirma că orice punct al graficului funcției h este un punct de forma $(f(\mathrm{m}), g(\mathrm{m}))$?

A 51. Să se demonstreze că unul și numai unul dintre numerele

$$2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1 \text{ și } 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$$

se divide cu 5, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}$.

A 52. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ 3 - x \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$

Să se rezolve ecuația $2f(x + 4) + 3f(5 - x) = 8$.

A 53. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ 5 - 2x \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$

Să se rezolve ecuația $3f(x + 2) - 4f(x + 1) = 9$.

A 54. Fie $f(x) = \begin{cases} -x + 2 \text{ dacă } x \leqslant -2 \\ 2x - 1 \text{ dacă } -2 < x < 3 \\ -3x + 4 \text{ dacă } x \geqslant 3 \end{cases}$

Să se reozlve ecuația $2f(x + 1) - 3f(2 - x) = 8$.

A 55. Fie $f(x) = \begin{cases} -3x + 2 \text{ dacă } x \leqslant -1 \\ x + 1 \text{ dacă } -1 < x \leqslant 4 \\ -x + 3 \text{ dacă } x > 4 \end{cases}$

Să se rezolve inecuația $3f(x + 2) \leqslant 1$.

A 56. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ dacă } x \leqslant 2 \\ 3 - x \text{ dacă } x > 2 \end{cases}$

Să se reprezinte grafic funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x + 4)$.

A 57. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 \text{ dacă } x \leqslant -1 \\ -x \text{ dacă } -1 < x < 2 \\ -3x + 3 \text{ dacă } x \geqslant 2 \end{cases}$

Să se reprezinte grafic $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x - 3) + 2|4 - x|$.

A 58. Există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît

$$f(x) + f(1 - x) = 6x, (\forall)\ x \in \mathbf{R}?$$

A 59. Să se cerceteze dacă există funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care să verifice simultan condițiile:

a) $f\left(\frac{1}{2} + x\right) + f\left(\frac{1}{2} - x\right) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, și,

b) $f(x) f(1 - x) = f(x) - x^2$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

A 60. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ dacă } x < -1 \\ -2x + 1 \text{ dacă } x \geqslant -1 \end{cases}$

Să se reprezinte grafic $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = 2f(x - 1) + 3f(-x + 2)$

A 61. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(0) = 0$ și

$$f(x) - f(x + 1) = 2x, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

Să se calculeze $f(50)$.

A 62. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție cu proprietățile:

a) $f(0) = f(1) = 2$

b) $f(x) - 2f(x + 1) + f(x + 2) = 3^{[x]}$, $(\forall)\ x \in R$.

Să se calculeze $f(50)$.

A 63. Determinați funcțiile $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ știind că

$$\begin{cases} f(2 + x) - 2g(3 - x) + h(2 - x) = -2x + 8 \\ f(2 - x) + g(3 + x) - 3h(2 + x) = -9x + 1 \\ f(x + 1) + 3g(4 - x) - 2h(3 - x) = 9x - 9 \end{cases}$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

A 64. Fie expresia $E(x) = x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{m + 1}{m}$. Să se arate că $E(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și orice $m > 1$.

A 65. a) Să se arate că pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ are loc $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$

b) Fie a, b, c, d numere reale strict pozitive astfel ca $abcd = 1$. Atunci are loc $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10$.

A 66. a) Să se demonstreze că polinoamele $P(X)$ care satisfac relația

$$(x + 1)P(x - 1) = (x - 1)P(x) + 2, \quad (1), \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R},$$

dau același rest la împărțirea cu X și cu $X + 1$,

b) Să se determine toate polinoamele $P(X)$ de gradul al doilea care satisfac relația (1).

A 67. Să se rezolve ecuația

$$|x - 6| = \left[\frac{x - 1}{2}\right] + \left[\frac{x - 2}{2}\right] + \left[\frac{x - 3}{2}\right] + \left[\frac{x - 4}{2}\right]$$

A 68. Să se determine toate funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$f(3 + 2x) = |x + 1|, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

și să se reprezinte grafic.

Scanned with OKEN Scanner

A 69. Să se determine toate funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$f(x) + 3f(-x) = |x + 2|, \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}.$$

A 70. Să se rezolve în numere naturale ecuația

$$3x^3 + 2xy + 3y^2 = 664.$$

A 71. Se știe că $x = 1$ și $x = 2$ sînt rădăcinile ecuației

$$x^3 + mx^2 + nx + 1 = 0.$$

Să se determine m, n și cealaltă rădăcină a ecuației.

A 72. Să se determine domeniul de definiție al funcției:

$$f(x) = \frac{x + 3}{3|x| - x^2 + 2}$$

A 73. Să se determine mulțimile

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3|x| + 2 = 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0\}.$$

A 74. În triunghiul oarecare ABC luăm un punct M în interiorul triunghiului și notăm $AM = x$, $BM = y$, $CM = z$. Să se demonstreze relația

$$\frac{(x+y)^n}{z^n} + \frac{(y+z)^n}{x^n} + \frac{(z+x)^n}{y^n} \geqslant \frac{a^n}{x^n} + \frac{b^n}{y^n} + \frac{c^n}{z^n}$$

A 75. a) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} m(x + y - 3) = 2 - x + y \\ m(2x - y) = 4 - 2x - y \end{cases}$$

unde m este un parametru real.

b) Să se determine $m \in \mathbf{Z}$ astfel încît $x \in \mathbf{Z}$ sau $y \in \mathbf{Z}$.

A 76. Să se rezolve ecuațiile:

a) $||x - 1| - 3| = 2$

b) $|x + |x - 1|| = |x - 2|$

A 77. Să se calculeze $(1 + \sqrt{2})^{16}$.

A 78. Să se determine n natural astfel încît numerele $3n - 2$ și $5n + 6$ să fie pătrate de numere pare consecutive.

A 79. Să se determine toate numerele naturale pentru care numărul $n^4 + 4$ este prim.

A 80. Se consideră polinomul cu coeficienți întregi

$$P(X) = aX^2 + bX + c.$$

Să se arate că dacă pentru orice număr întreg m, restul împărțirii polinomului $P(X)$ prin $X - m$ este un multiplu de 3, atunci numerele a, b, c se divid prin 3.

Scanned with OKEN Scanner

A 81. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3[x] + [y] = 5 \\ 2[x] - 3[y] = -4 \end{cases}$$

A 82. Să se rezolve și să se discute sistemul:

$$\begin{cases} mx + (3 - m)\, y = m + 5 \\ x + y = \dfrac{m^2 - 3m + 12}{m\,(3 - m)} \end{cases}$$

unde m este un parametru real diferit de 0 și 3.
Pentru ce valori ale lui m întregi, soluția sistemului este formată din numere întregi.

A 83. Știind că x este o rădăcină a ecuației $x^3 + x - 1 = 0$, să se arate că expresia

$$E = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 5}{x^5 - x^2 - x + 2}$$

este constantă.

A 84. Se dă ecuația $x^2 + 2\,(3m + 2)\,x + 3\,(2m + 1) = 0$.

a) Să se arate că are rădăcinile reale și să se calculeze.

b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$, astfel încît

$$x_1^2 + x_2^2 < \frac{10\,m}{3}\, x_1\, x_2$$

unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

A 85. Să se calculeze expresia:

$$E = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 5x + 4} - \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 4x + 3}$$

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE PLANĂ

P 1. Fie ABC un triunghi în care $AB = 4$, $AC = 6$, $BC = 8$ și $M \in (BC)$ astfel încît $BM = 3\,MC$. Să se determine AM.

P 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $M \in \text{Int}(ABC)$. Să se arate că cel puțin una dintre distanțele MA, MC, MB este mai mică decît R și cel puțin una mai mare decît R, unde R este raza cercului circumscris.

P 3. Fie ABC un triunghi și $AD \perp BC$, $D \in (BC)$, în care $AB = 5$, $AC = 4$ și $m(\widehat{DAC}) = 30°$. Să se calculeze BC și AD.

P 4. Fie ABC un triunghi, $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ astfel încît $BM = 2MC$ și $AN = 2NC$. Să se arate că AM, BN și mediana din C sînt concurente.

P 5. În patrulaterul convex $ABCD$, $AC^2 + BD^2 = AD^2 + 2AB \cdot CD + BC^2$. Să se arate că $ABCD$ este trapez sau paralelogram.

P 6. Fie AA', BB', CC' trei ceviene arbitrare (nu neapărat concurente) și M, N, P mijloacele lor. Să se arate că $\text{Per}(MNP) \leqslant \frac{1}{2}\text{Per}(ABC)$, unde $\text{Per}(MNP)$ înseamnă perimetrul lui MNP.

P 7. Fie ABC un triunghi și AL bisectoarea unghiului A, $L \in (BC)$. Să se arate că $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot LC$.

P 8. Fie $ABCDE$ un pentagon și M, N, P, Q, R, S, T, respectiv, U, mijloacele segmentelor DE, AD, AB, BD, MQ, MP, NQ, respectiv, NP. Să se arate că $SUTR$ este paralelogram.

P 9. Fie un pătrat cu latura 1. Să se arate că oricum am alege 5 puncte în interiorul pătratului sau pe laturi, există două a căror distanță este mai mică decît $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

P 10. Fie ABC un triunghi echilateral și M_1, $M_2 \in (BC)$, M_3, $M_4 \in (CA)$, M_5, $M_6 \in (AB)$ astfel încît $BM_1 = M_1M_2 = M_2C = CM_3 = M_3M_4 = M_4A = AM_5 = M_5M_6 = M_6B$. Să se arate că $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ este hexagon regulat.

Scanned with OKEN Scanner

P 11. Cum trebuie să fie un triunghi pentru ca o înălțime și mediana corespunzătoare să împartă unghiul din care pleacă în trei părți egale?

P 12. Să se arate că orice ceviană a unui triunghi este mai mică decît cel puțin una din laturile cu vîrful comun cu ceviana.

P 13. Fie $ABCD$ un pătrat și punctele $M \in (AB)$, $N \in (CD)$, Să se arate că $MN < AC$.

P 14. Fie ABC un triunghi echilateral și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$. Să se arate că $MN < BN$ și $MN < CM$.

P 15. Fie un triunghi echilateral de latură 1. Să se arate că oricum am alege 10 puncte în interiorul triunghiului există două a căror distanță este mai mică decît $\frac{1}{3}$.

P 16. Fie ABC un triunghi și $M \in (BC)$ astfel încît $BM = k \cdot MC$, $k > 0$. Să se determine AM în funcție de laturile triunghiului și de k.

P 17. Folosind eventual problema anterioară, să se determine lungimea medianei și lungimea bisectoarei din A ale unui triunghi în funcție de laturile triunghiului.

P 18. Fie ABC un triunghi și $M \in (BC)$. Să se arate că

$$AM \perp BC \Leftrightarrow AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2$$

P 19. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $M \in (BC)$ astfel încît $BM = k \cdot MC$. Să se arate că

$$AM \perp BC \Leftrightarrow k = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{AB^2 - AC^2 - BC^2}$$

și să se determine lungimea înălțimii AM în funcție numai de laturi.

P 20. Fie D piciorul înălțimii din A într-un triunghi ABC dreptunghic în A. Să se arate că suma razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, ABD, ACD este egală cu înălțimea AD.

P 21. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $P \in \text{Int}(ABC)$. Dacă d_1, d_2, d_3 sînt distanțele de la P la laturile AB, BC, CA atunci cel puțin una este mai mică decît r și cel puțin una este mai mare decît r, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC.

P 22. Fiind dat triunghiul ABC alegem un punct oarecare pe una din laturile sale și ducem prin el paralele la celelalte laturi ale triunghiului. Notînd cu S_1, S_2 ariile triunghiurilor ce se formează și cu S aria triunghiului dat să se arate că

$$2(S_1 + S_2) \geqslant S.$$

P 23. Se dă un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$. Un cerc este tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC și de asemenea laturilor AB și AC în P, respectiv Q. Să se demonstreze că mijlocul segmentului PQ este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Scanned with OKEN Scanner

P 24. Fie ABC un triunghi oarecare ascuțitunghic, D, E, F picioarele înălțimilor, A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, AB și M, N, P mijloacele înălțimilor. Să se arate că dreptele $A'M$, $B'N$, $C'P$ sînt concurente.

P 25. Fie ABC un triunghi, AA' ceviană și $P \in (A'A)$ astfel încît $A'P = AA'\ k$. Să se exprime $S(BCD)$ în funcție de aria $S(ABC)$.

P 26. Fie ABC un triunghi AA', BB', CC' trei ceviene (nu neapărat concurente), $P_1 \in (AA')$, $P_2 \in (BB')$, astfel încît $A'P_1 = k_1 AA'$, $B'P_2 = k_2 BB'$, $C'P_3 = k_3 CC'$. Atunci condiția necesară și suficientă pentru ca $S(BP_1C) + S(CP_2A) + S(AP_3B) = S(ABC)$ este $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

P 27. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct în interiorul său Fie A', B', C' proiecțiile lui M pe laturile BC, CA, respectiv, AB Să se arate că $BA' + CB' + AC'$ este constantă.

P 28. Fie ABC un triunghi și BB', CC' două ceviene arbitrare. Fie A_1 mijlocul lui BC. Dreptele A_1C' și A_1B' intersectează paralela la BC dusă prin A în punctele B_1, respectiv C_1. Să se arate că B_1B' și C_1C' se intersectează pe mediana din A a triunghiului ABC.

P 29. Fie $ABCD$ un patrulater cu $\hat{B} = \hat{D} = 90°$ și fie $AF \perp BD$, $CE \perp BD$, $E, F \in (BD)$. Să se arate că $BF = ED$.

P 30. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuțite, O centrul cercului circumscris și H ortocentrul triunghiului ABC. Presupunem că bisectoarea unghiului A este perpendiculară pe OH. Să se arate că $m(\widehat{BAC}) = 60°$.

P 31. Să se arate că oricare ar fi punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile BC, AC, AB ale unui triunghi ascuțitunghic ABC există un punct comun cercurilor circumscrise triunghiurilor AB_1C_1, A_1BC_1 și A_1B_1C.

P 32. Paralela dusă prin vîrful A al unui triunghi oarecare ABC la mediana dusă din B, paralela dusă prin B la mediana din C și paralela dusă din C la mediana din A se intersectează în punctele A_1, B_1, C_1. Să se arate că: $S(A_1B_1C_1) = 3S\ (ABC)$.

P 33. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) se duce înălțimea AD.

Dacă $\frac{BC}{AB} = k$ să se afle:

a) Raportul dintre ariile triunghiurilor ABD și ACD.

b) Raportul dintre perimetrele triunghiurilor ABC și ABD.

P 34. Într-un cerc se înscrie un triunghi ascuțitunghic ABC. Perpendiculara în A pe AC mai taie cercul în M, iar perpendiculara tot în A pe AB mai taie cercul în punctul N.

Să se arate că dreptele MN și BC sînt paralele.

Scanned with OKEN Scanner

P 35. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90°$) fie D piciorul înălțimii din A pe ipotenuza BC, iar E și F proiecțiile lui D pe catetele AB și respectiv, AC. Dreptele BF și CE se intersectează în punctul G.

Să se arate că: $S(AEGF) = S(BGC)$.

P 36. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC și $ME \| AB$, $MF \| AC$, $E, F \in BC$. Paralelele din E și F la AM taie laturile AB și AC în E', respectiv F'. Notînd cu S, S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor ABC, BEE', EMF și $FF'C$ să se arate că

$$S_1 + S_2 + S_3 \geqslant \frac{1}{2} S$$

P 37. Cercurile C_1 și C_2 cu centrele O_1 și O_2 sînt secante în A și B. Secanta O_1A intersectează cercul C_2 în C, iar secanta O_2A intersectează cercul C_1 în D. Să se demonstreze că AB, AC și AD sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului BCD.

P 38. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90°$) piciorul înălțimii din A se proiectează în M pe latura AB și în N pe latura AC. Să se arate că dreapta MN este tangentă la cercurile de diametre BD și DC și că, dacă E, F, G sînt respectiv mijloacele segmentelor BD, DC, BC, atunci are loc relația.

$$8(ME^2 + NF^2) = BC^2 + 4 \cdot DG^2.$$

P 39. Fie un punct M mobil în interiorul triunghiului ABC. Notînd cu d_a, d_b, d_c distanțele punctului M la laturile BC, CA, AB să se calculeze minimumul expresiei

$$E = \frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c}$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului ABC. Să se arate ce poziție ocupă punctul M în acest caz.

P 40. În triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AC = b$, $AB = c$ se înscrie un semicerc tangent catetelor și cu diametrul pe ipotenuză.

Să se demonstreze că:

a) mijlocul diametrului semicercului este piciorul bisectoarei interioare a unghiului A;

b) raza semicercului este dată de relația

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

P 41. Să se demonstreze că într-un patrulater iscriptibil ortodiagonal, diametrul care trece prin unul din vîrfuri este izogonal diagonalei care pleacă din acest vîrf.

P 42. Un trapez dreptunghic are baza mare $BC = 6$, baza mică $AD = 5$, unghiurile drepte A, B, iar $AB = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze perimetrul trapezului.

b) Pe diagonala BD se ia punctul E astfel încît segmentul ED să fie $\frac{2}{5}$ din BD. Perpendiculara ridicată în E pe dreapta BD întîlnește dreapta AD în F. Să se arate că triunghiurile ABD și DEF sînt asemenea și să se calculeze lungimea segmentului EF.

c) Să se calculeze distanța punctului E la dreapta BC.

P 43. Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90°$ și $AC = 2a$ și $AB = a$. Se notează cu M mijlocul lui AC și se cere:

a) să se împartă BC în cinci părți egale prin punctele D, E, F, G astfel încît $BD = DE = EF = FG = GC$.

b) să se arate că triunghiurile MFC și BAC sînt asemenea.

c) să se calculeze aria patrulaterului $AEFM$.

P 44. Să se arate că într-un patrulater convex raportul între suma pătratelor diagonalelor și suma diagonalelor este mai mic decît semiperimetrul patrulaterului.

P 45. Se dă triunghiul ABC unde $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{BAC})$. Punctul D aparține segmentului BC astfel încît $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ABC})$.

a) Stabiliți dacă $AC^2 = DC \cdot BC$.

b) Dacă, în plus, $AD \perp BC$, iar E și F sînt proiecțiile lui D pe dreptele AB și respectiv AC, atunci avem relația:

$$AC \cdot AE + AB \cdot AF = AB \cdot AC.$$

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

S 1. Fie unghiul XOY având măsura de $45°$ și $A \in OX$ astfel ca $OA = a$. Punctul B este simetricul punctului A față de OY, $AB \cap OY = \{M\}$. Dacă $OV \perp (XOY)$ calculați:
a) Lungimea segmentului OV, astfel ca măsura unghiului format de planele (ABV) și (XOY) să fie $30°$.
b) Distanța de la punctul O la planul (VAB).
c) Aria totală și volumul corpului $VOAB$.

S 2. Se consideră în spațiu trei semidrepte Ox, Oy, Oz formînd, două cîte două, unghiuri de $60°$. Pe semidreapta Ox se fixează un punct A astfel încît $OA = 2a$. Să se determine distanțele de la A la OY, Oz și la planul (yOz).

S 3. Se consideră un triunghi ABC și un punct V care nu aparține planului (ABC). Să se găsească un punct P în interiorul triunghiului ABC astfel încît volumele tetraedrelor $AVPB$, $VBPC$, $VCPA$ să fie egale.

S 4. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie a și M un punct interior segmentului AC. Ducem prin M planul paralel cu muchiile AB și CD care taie muchiile BC, BD și AD respectiv în N, P și Q. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi și să se determine $x = AM$ astfel încît aria lui $MNPQ$ să fie maximă.

S 5. Fie $OABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vîrful O. Prin muchia AB se duce un plan oarecare α care taie muchiile OC, OD în M și respectiv N.
a) Să se arate că $ABMN$ este trapez isoscel.
b) Să se arate că aria triunghiului OBM este medie geometrică între ariile triunghiurilor OAB și OMN.

S 6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu muchia de lungime a și M un punct variabil pe muchia AB, N un punct variabil pe muchia AD, astfel încît $AM = DN$, iar P un punct variabil din planul $(A'B'C')$. Să se determine volumul maxim pe care-l poate avea tetraedrul $MNPA$.

S 7. Pe muchiile AB, BC, CD și DA ale unui tetraedru regulat $ABCD$ se iau punctele M, N, P și respectiv Q astfel încît să avem $AM = BN = CP = DQ$. Notăm cu O mijlocul segmentului NQ. Să se demonstreze că planul (MOP) este perpendicular pe dreapta NQ.

Scanned with OKEN Scanner

S 8. Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ având toate cele opt muchii de lungime a. Fie C_1 mijlocul segmentului CV. Să se arate că planul (BDC_1) este perpendicular pe planele (VBC), (VDC) și (VAC).

S 9. Să se demonstreze că în orice piramidă cu baza dreptunghi și piciorul înălțimii într-unul din vîrfurile bazei, puterea a patra a măsurii celei mai lungi muchii laterale este cel puțin egală cu de șase ori suma pătratelor ariilor fețelor laterale.

S10. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră, avînd muchiile laterale conguente. Pe muchiile laterale SA, SB, SC și SD se iau punctele M, N, P și respectiv Q, astfel încît $AM + CP = BN + DQ$. Notăm cu U mijlocul segmentului MP, iar cu V mijlocul segmentului NQ. Să se arate că dreapta UV este paralelă cu planul bazei piramidei.

S 11. Pe planul triunghiului ABC, în același semispațiu, se ridică trei perpendiculare în punctele A, B, C pe care luăm M, N, P astfel încît $AM = a$, $BN = b$, $CP = c$. Să se arate că

$$V(ABCMNP) = \frac{1}{3}S(ABC)\,(a + b + c)$$

S 12. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică în punctele A, B, C, D patru perpendiculare pe care se iau punctele M, N, P, Q astfel încît $MA = a$, $NB = b$, $PC = c$, $QD = d$. Să se arate că

$$V(ABCDMNPQ) = \frac{1}{4}S(ABCD)\,(a + b + c + d)$$

S 13. Pe planul pătratului $ABCD$ de latură $2a$, în B, C, D se ridică perpendicularele d_1, d_2 și d_3 pe care se consideră segmentele $BN = a$, $CM = 2a$, $DP = a$. Fie $MN \cap BC = \{Q\}$ și $MP \cap CD = \{S\}$. Să se arate că $A \in QS$ și să se afle $S(MQS)$.

S 14. Fie $ABCD$ un tetraedru cu proprietățile $AB = AC = BC = AD = BD$ și $AD \perp BC$. Să se demonstreze că $ABCD$ este tetraedru regulat.

S 15. Se consideră piramida triunghiulară $ABCD$ cu muchiile $AB = BC = CD = DA = a$. Fie M și respectiv N, mijloacele muchiilor AC și BD.
a) Să se arate că MN este perpendiculară pe AC și BD.
b) Să se exprime lungimea segmentului MN în funcție de a, AC și BD.

S 16. Unind trei vîrfuri ale unui tetraedru regulat cu mijlocul înălțimii coborîte din al patrulea vîrf, obținem trei drepte perpendiculare două cîte două.

S 17. Fie planele paralele α și β, și punctele A, $B \in \alpha$, C, $D \in \beta$. Știind că $AC = 13a$, $BD = 15a$, iar suma proiecțiilor segmentelor AC și BD pe α este $14a$ să se afle:
a) Lungimile x și y ale celor două proiecții.
b) Distanța d dintre planele α și β.

Scanned with OKEN Scanner

S 18. Fie un cub $ABCDA'B'C'D'$ și M mijlocul muchiei AA', $AA' = a$. Să se afle distanța de la punctul B la planul $(MC'D')$.

S 19. Să se demonstreze că dacă M, N, P sînt centrele de greutate a trei fețe ale tetraedrului $ABCD$, iar Q un punct oarecare din planul celei de a patra fețe, atunci raportul dintre volumele tetraedrelor $ABCD$ și $MNPQ$ este 27.

S 20. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D. Fie punctele M, N, P, Q situate în planul (ABC), astfel încît M este mijlocul lui AC, N este mijlocul lui BM, P mijlocul lui NC și Q mijlocul lui BP. Să se demonstreze că punctele A, N, Q, D sînt coplanare și că MP este paralelă cu acest plan.

S 21. Se dă tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$ și M un punct în interiorul său. Fie B_i intersecția dreptei A_iM cu fața opusă, $i = 1, 2, 3, 4$. Să se arate că printre rapoartele $\frac{A_iM}{MB_i}$, $i = 1,2,3,4$ există cel puțin unul care nu este mai mare decît 3 și cel puțin unul care nu este mai mic decît 3.

S 22. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 3$ și $BC = 4$. În punctul A ridicăm pe planul dreptunghiului o perpendiculară și fie pe această perpendiculară un punct P astfel încît $PC = 6$. Să se calculeze volumul tetraedrului $PBCD$ și distanța de la C la planul (PBD).

S 23. Fie $VABC$ un tetraedru cu $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$ și $M \in (VA)$, $N \in (VB)$, $P \in (VC)$ astfel încît $VM = m$, $VN = n$, $VP = p$. Să se arate că:

$$\frac{V(VMNP)}{V(VABC)} = \frac{mnp}{abc}$$

S 24. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu $AB = 6$ și $VO = 4$, $AC \cap BD = \{O\}$. Să se determine VM, unde $M \in (VC)$ astfel încît $(ABM) \perp (VCD)$. Să se determine raportul volumelor celor două corpuri obținute prin secționarea piramidei cu planul (ABM).

S 25. Fie piramida $VABCD$ cu $ABCD$ dreptunghi, $AC \cap BD = \{O\}$, $VO \perp (ABCD)$ și $AB = 4$, $BC = 3$, $VO = 6$. Fie α planul perpendicular pe AC și care conține pe B. Fie $\alpha \cap CD = \{E\}$. Să se determine $V(VBCE)$.

S 26. Care este cilindrul de volum maxim înscris într-un con avînd unghiul înclinațiilor pe planul bazei de 45° și aria totală constantă?

S 27. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel ($AB = AC = a$). În punctul C se duce perpendiculara pe planul triunghiului pe care se ia un punct S astfel încît $SC = a$. Dacă $CP \perp SB$, iar Q este mijlocul segmentului SA, să se demonstreze că patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil.

S 28. Să se exprime aria unei zone sferice în funcție de înălțimea ei h și razele bazelor a și b ($a < b$). (Considerăm numai cazul în care bazele sînt de aceeași parte a centrului).

Scanned with OKEN Scanner

S 29. Să se calculeze aria laterală și volumul unui trunchi de con știind că raza bazei mari a trunchiului este $R\sqrt{3}$ și că în trunchiul respectiv se poate înscrie o sferă de rază R.

S 30. Fie $ABCD$ cu tetraedru astfel încît triunghiul BCD este echilateral de latură $\sqrt{6}$ și $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = 45°$.

a) Să se demonstreze că $(ABC) \perp (ABD)$.

b) Dacă în plus $\widehat{ACB} = 75°$ să se afle distanța de la B la planul (ACD).

S 31. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de latură 1 și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $Q \in (BD)$ astfel încît $AM = MB$, $AN = 3NC$ și $BQ = DQ$.

Să se determine secțiunea tetraedrului prin planul $\alpha = (MNQ)$ și perimetrul acestei secțiuni.

S 32. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu toate fețele triunghiuri echilaterale de latură 1 și $M \in (VD)$ astfel încît $VM = MD$, $N \in (VC)$ astfel încît $VN = 3NC$ și P mijlocul lui AB.

a) Să se deseneze secțiunea piramidei prin planul (MNP).

b) Să se determine perimetrul poligonului de secțiune.

S 33. Fie ABC un triunghi cu $AB = 3$, $AC = \sqrt{3}$ și $BC = 2\sqrt{3}$. Pe planul triunghiului ABC ridicăm o perpendiculară în A pe care luăm punctul M, $AM = x$. Să se determine x astfel ca $m(\widehat{BMC}) = 60°$. Există un asemenea punct dacă ridicăm perpendiculara în B sau în C?

S 34. O piramidă are vîrful în V și ca bază rombul $ABCD$. Știind că diagonalele bazei sînt de 8 și 6 și că se întîlnesc în O, iar înălțimea piramidei este $VO = 4$, să se calculeze:

a) Volumul piramidei.

b) Lungimile muchiilor.

c) A și C fiind capetele diagonalei mari ale bazei să se arate că dreptele AV și CV sînt perpendiculare între ele.

S 35. Să se demonstreze că într-un tetraedru tridreptunghic $VABC$ ($VA \perp VB \perp VC \perp VA$) suma distanțelor lui V la dreptele AB, BC, CA este mai mică sau egală cu semiperimetrul triunghiului ABC. În ce caz avem egalitate?

S 36. Fie AA' și BB' înălțimi în tetraedrul $ABCD$, concurente.

a) Să se arate că înălțimile din C și D sînt tot concurente.

b) Avem relația $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$.

S 37. Două fețe laterale alăturate ale unei piramide patrulatere regulate formează un unghi de 120°. Să se arate că fețele laterale nealăturate sînt perpendiculare.

Scanned with OKEN Scanner

S 38. Pe semidreptele distincte Ox, Oy, Oz situate într-un plan α se iau punctele A, B, C. Fie V un punct exterior lui α astfel încît $\widehat{VOA} = \widehat{VOB} = \widehat{VOC}$. Să se arate că $VO \perp \alpha$.

S 39. Dacă în tetraedrul $ABCD$, $AD \perp BC$ și $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC})$, atunci $AB = AC$.

S 40. Există o piramidă $VABCD$ în care să avem baza $ABCD$ un romb de latură a, $VA = VB = VC = a$, iar unghiul $\widehat{BAD}$ de măsură $60°$?

Scanned with OKEN Scanner

S 38. Pe semidreptele distincte Ox, Oy, Oz situate într-un plan α se iau punctele A, B, C. Fie V un punct exterior lui α astfel încît $\widehat{VOA} = \widehat{VOB} = \widehat{VOC}$. Să se arate că $VO \perp \alpha$.

S 39. Dacă în tetraedrul $ABCD$, $AD \perp BC$ și $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC})$, atunci $AB = AC$.

S 40. Există o piramidă $VABCD$ în care să avem baza $ABCD$ un romb de latură a, $VA = VB = VC = a$, iar unghiul $\widehat{BAD}$ de măsură $60°$?

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTELE CONCURSURILOR DE ADMITERE ÎN LICEE — 1990

I — Sesiunea iulie — REAL

1. a) (1*p*)* Să se calculeze $A = 0{,}03 : 10^{-2} + \sqrt{500} - \frac{50}{\sqrt{5}}$.

b) (1*p*) Să se discute și să se rezolve ecuația $\frac{m-1}{x-2} = m$, $m \in \mathbf{R}$.

c) (1*p*) Să se determine constanta reală α dacă notînd $P(X) = X^2 + X + 1$ avem $P(1+x) = P(1-x)$, pentru orice x real.

2. a) (1*p*) Să se reprezinte grafic funcția $f : [-2, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x^2} + |x - 1|$$

b) (1*p*) Să se determine α dacă $1 - 2\alpha$ și $4 - \alpha$ reprezintă lungimile (măsurate în cm) ale laturilor unui triunghi dreptunghic cu aria 30 cm².

c) (1*p*) Un cub are lungimea diagonalei de 3 cm. Să se calculeze volumul cubului.

3. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A, avînd lungimile catetelor $AB = c$, $AC = b$, latura AB fiind situată într-un plan α. Fie D proiecția ortogonală a lui C pe planul α și $CD = h$, $(0 < h < b)$.

a) (1*p*) Să se calculeze lungimile segmentelor AD și BD;

b) (1*p*) Să se arate că măsura unghiului $\widehat{ABC}$ este mai mare decît cea a unghiului $\widehat{ABD}$ și să se calculeze volumul piramidei $CABD$.

c) (1*p*) Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{CAD}$ dacă aria triunghiului ABC este dublul ariei triunghiului ABD.

---

* În paranteză este trecut punctajul. Fiecare lucrare primește 1 p din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

II — Sesiunea iulie — UMAN

1. a) (1p) Să se calculeze diferența $A-B$ a numerelor $A = 0{,}2 \times 10$ și $B = (2 + 6 \times 3) \times (10{,}7 : 107)$.

b) (1p) Să se rezolve inecuația $x + 10 \leqslant 4(x - 2)$.

c) (1p) Să se rezolve ecuația $x + \frac{2}{x} = 5 + \frac{2}{5}$.

2. a) (1p) Să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului $P(X) = (X^2 + 1)^3 - 2(X^2 + 1) + 1990$ la $X^2 + 1$.

b) (1p) Să se simplifice fracția

$$\frac{(X^2 + X)(X^2 + X + 1) - 2}{(X^2 + X)(X^2 + X + 3) + 2}.$$

c) (1p) Dacă a, b sînt numere strict pozitive, să se arate că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$. Deduceți că dacă a, b, c sînt numere strict pozitive, atunci $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 6$; în ce caz avem egalitate?

3. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia a. Să se calculeze.

a) (1p) aria triunghiului ACD';

b) (1p) volumul tetraedrului $DACD'$;

c) (1p) distanțele de la D la planele (ACD') și $(BA'C')$.

III — Sesiunea septembrie — complexitate A

1. a) (1p) Să se rezolve inecuația: $(2x - 4)(x - 5) \leqslant 0$;

b) (1p) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y \quad\; = 3 \\ x + y + 2z = 6 \end{cases}$

2. a) (2p) Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ -x + 3 & \text{dacă } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

b) (1p) Fie polinomul $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Să se determine numărul real a, astfel încît $P(a - 1) = P(a)$;

c) (1p) Arătați că polinomul $P(X) = X^{n+1} - nX^n + (n - 1)$ se divide cu $X - 1$, oricare ar fi numărul natural n.

3. O prismă dreaptă cu baza un trapez oarecare $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB = 25$ cm, $CD = 8$ cm, $BC = 13$ cm și înălțimea de 5 cm, este

Scanned with OKEN Scanner

secționată cu două plane paralele ce trec prin D și C și sînt perpendiculare pe CD. Știind că înălțimea prismei este de 10 cm, să se calculeze.

a) (1,5p) ariile totale ale corpurilor formate în urma secționării;

b) (1,5p) volumele corpurilor formate în urma secționării.

IV — Sesiunea septembrie — complexitate B

1. a) (1p) Să se calculeze: $A = 2^3(5{,}4 + 7{,}6) - \sqrt{625}\,(0{,}2 \cdot 10 + 3 \cdot 0{,}04)$;

b) (1p) Să se rezolve ecuația: $2x - 5 = x - \frac{1}{2}$,

c) (1p) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

2. a) (1p) Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \\ -2x & \text{dacă } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

b) (1p) Să se simplifice fracția: $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - x}$

c) (1p) Arătați că polinomul $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ se divide cu $X - 1$.

3. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are dimensiunile: $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $AA' = 12$ cm. Să se calculeze:

a) (1p) lungimea diagonalei sale;

b) (1p) aria totală a paralelipipedului și volumul său;

c) (1p) distanța de la unctul C la dreapta AC'.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚII

ALGEBRĂ

A 1. Condiția de existență a soluției $a+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in [-2, \infty)$

Aplicăm echivalența $|f(x)| = m,\ m \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ sau $f(x) = -m$. Avem $|3x-1| = a+2 \Leftrightarrow 3x-1 = a+2$ sau $3x-1 = -a-2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(a+3)$ sau $x = -\frac{1}{3}(a+1)$

b) Explicităm modulele și avem

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{dacă } x \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \\ 1-2x & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{dacă } x \in (-\infty, 3] \\ x-3 & \text{dacă } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Caz 1. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. Ecuația devine $1-2x-(3-x) = a+1 \Leftrightarrow x = -a-3$. Din $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -a-3 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow a > -\frac{7}{2}$.

Caz 2. $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$. Ecuația devine $2x-1-(3-x) = a+1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(a+5)$. Din $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ avem

$$\begin{cases} \frac{a+5}{3} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{7}{2}, \infty\right) \\ \frac{a+5}{3} \leqslant 3 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 4] \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{7}{2}, 4\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

Caz 3. $x \in (3, \infty)$. Ecuația devine $2x - 1 - (x - 3) = a + 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = a - 1$ și din $x \in (3, \infty) \Leftrightarrow a - 1 > 3 \Leftrightarrow a > 4$

Deci soluția este:

$$x = \begin{cases} -a - 3 \text{ dacă } a \in \left(-\frac{7}{2}, \infty\right) \\ \frac{a+5}{3} \text{ dacă } a \in \left[-\frac{7}{2}, 4\right] \\ a - 1 \text{ dacă } a \in (4, \infty) \end{cases}$$

A 2. Condițiile de existență sînt $\frac{3x-5}{x+1} \geqslant 0$ și $x + 1 \neq 0$ de unde $x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$ și deoarece din enunț $x \in \mathbf{Z}$ rămîne că $x \in \left((-\infty, -1) \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)\right) \cap \mathbf{Z}$. Fie $\sqrt{\frac{3x-5}{x+1}} = k$, $k \in \mathbf{N}$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{3x-5}{x+1} = k^2 \Rightarrow \frac{3(x+1)-8}{x+1} = k^2 \Rightarrow -\frac{8}{x+1} = k^2 - 3$ și din $k^2 - 3 \in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{8}{x+1} \in \mathbf{Z} \Rightarrow (x+1) \mid 8 \Rightarrow x + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$ de unde $x \in \{0, -2, 1, -3, 3, -5, 7, -9\}$ și, din condiția de existență, rezultă $x \in \{-2, -3, -5, -9, 3, 7\}$. Verificînd valorile lui x în relația din enunț obținem $x \in \{-9, 3\}$.

Altfel. Din $\frac{3x-5}{x+1} = k^2 \Rightarrow x = \frac{k^2+5}{-k^2+3} = -\frac{k^2+5}{k^2-3} = -\frac{k^2-3+8}{k^2-3} = -1 - \frac{8}{k^2-3} \Rightarrow \frac{-8}{k^2-3} = x + 1$ și din $x \in$ $\in \mathbf{Z} \Rightarrow \frac{8}{k^2-3} \in \mathbf{Z} \Rightarrow (k^2 - 3) \mid 8 \Rightarrow k^2 - 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$.

Se analizează toate cazurile și obținem $k \in \{2, 1\} \Rightarrow x \in \{-9, 3\}$.

Deci soluții $x = 3$ și $x = -9$.

A 3. a) Inecuația este echivalentă cu $x + 7 \leqslant 0$ cu tabloul

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$	

Deci soluție $x \in (-\infty, -7]$.

b) Observăm că $|f(x)| \leqslant m \Leftrightarrow -m \leqslant f(x) \leqslant m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant m \\ f(x) \geqslant -m \end{cases}$

În cazul nostru avem $|x + 3| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x + 3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \in$ $\in [-8, 2]$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Observăm că $|f(x)| \geqslant m \Leftrightarrow f(x) \geqslant m$ sau $f(x) \leqslant -m$. În cazul nostru $|2x-1| \geqslant 4 \Leftrightarrow 2x-1 \geqslant 4$ sau $2x-1 \leqslant -4 \Leftrightarrow 2x \geqslant 5$ sau $2x \leqslant -3 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$ sau $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$. Deci soluția este $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$

d) Explicităm modulele

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \in [0, \infty) \\ -x \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ dacă } x \in [1, \infty) \\ 1-x \text{ dacă } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Caz 1. $x \in (-\infty, 0)$. Inecuația devine $-x-x+1 \leqslant 4 \Leftrightarrow 2x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$ și din condiția cazului 1 obținem $x \in (-\infty, 0) \cap \left[-\frac{3}{2}, \infty\right) \Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right)$, (1).

Caz. 2 $x \in [0, 1)$. Inecuația devine $x+1-x \leqslant 4 \Leftrightarrow 1 \leqslant 4$ ceea ce este adevărat. Deci orice $x \in [0, 1)$, (2), reprezintă soluție.

Caz 3. $x \in [1, \infty)$. Inecuația devine $x+x-1 \leqslant 4 \Leftrightarrow 2x-5 \leqslant 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$. Din condiția cauzului $x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \cap [1, \infty) \Rightarrow x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$, (3).

Din (1), (2) și (3) avem $x \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup [0, 1) \cup \left[1, \frac{5}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

Deci soluția inecuației este $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

e) Explicităm modulele

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 \text{ dacă } x \in [-1, \infty) \\ -x-1 \text{ dacă } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ dacă } x \in [2, \infty) \\ 2-x \text{ dacă } x \in (-\infty, 2) \end{cases}$$

Caz 1. $x \in (-\infty, -1)$. Inecuația devine $2(-x-1) - 8(2-x) \geqslant 8 \Leftrightarrow x \in [11, \infty)$ și deci $x \in (-\infty, -1) \cap [11, \infty) = \emptyset$, (1)

Caz. 2. $x \in [-1, 2)$. Inecuația devine $2(x+1) - 8(2-x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{5}, \infty\right)$ și deci $x \in [-1, 2) \cap \left[\frac{7}{5}, \infty\right) = \left[\frac{7}{5}, 2\right)$, (2).

Scanned with OKEN Scanner

Caz 3. $x \in [2, \infty)$. Inecuația devine $2(x+1) - 3(x-2) \geqslant 8 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (-\infty, 5]$ și deci $x \in [2, \infty) \cap (-\infty, 5] = [2, 5]$, (3).

Din (1), (2) și (3) avem $x \in \varnothing \cup \left[\frac{7}{5}, 2\right) \cup [2, 5] = \left[\frac{7}{5}, 5\right]$

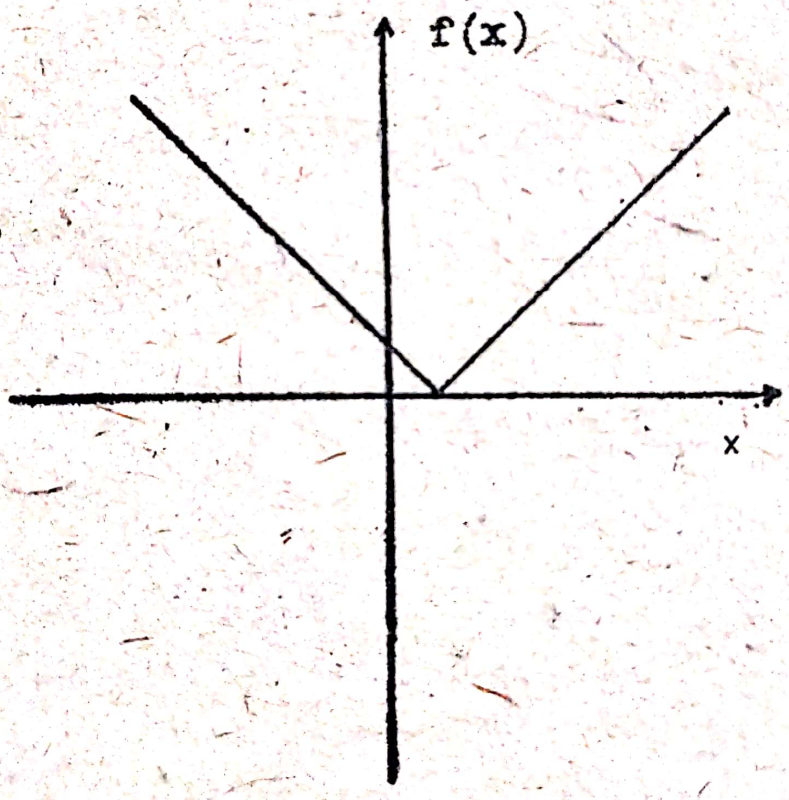
Soluție $x \in \left[\frac{7}{5}, 5\right]$.

A 4. a) Avem $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dacă } x \geqslant 1 \\ 1 - x & \text{dacă } x < 1 \end{cases}$

Tabloul de valori este

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		2	1	0	1	

Graficul este



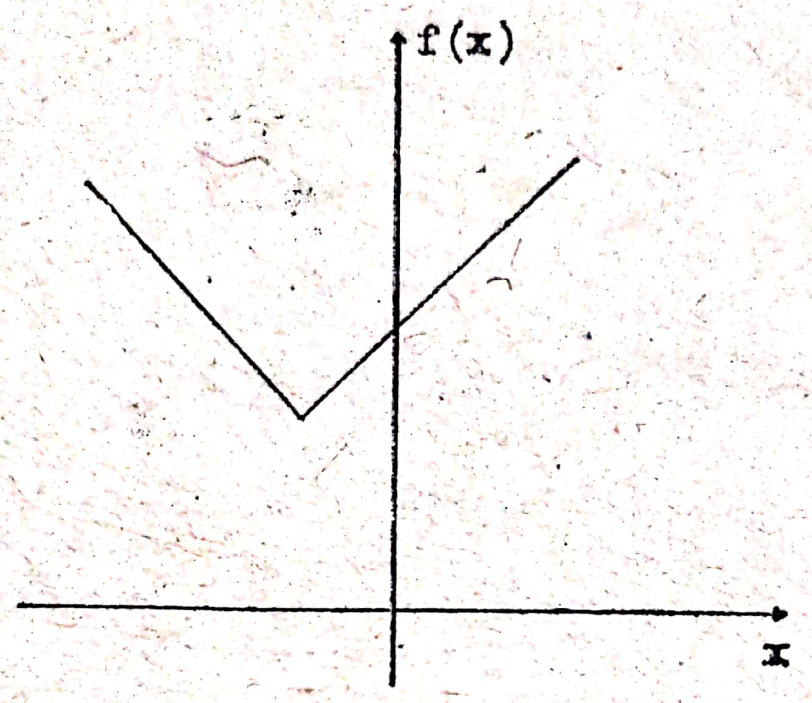
b) Avem $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{dacă } x \geqslant -2 \\ -x + 2 & \text{dacă } x < -2 \end{cases}$

Tabloul de valori este

x	$-\infty$	-4	-5	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$		6	5	4	5	

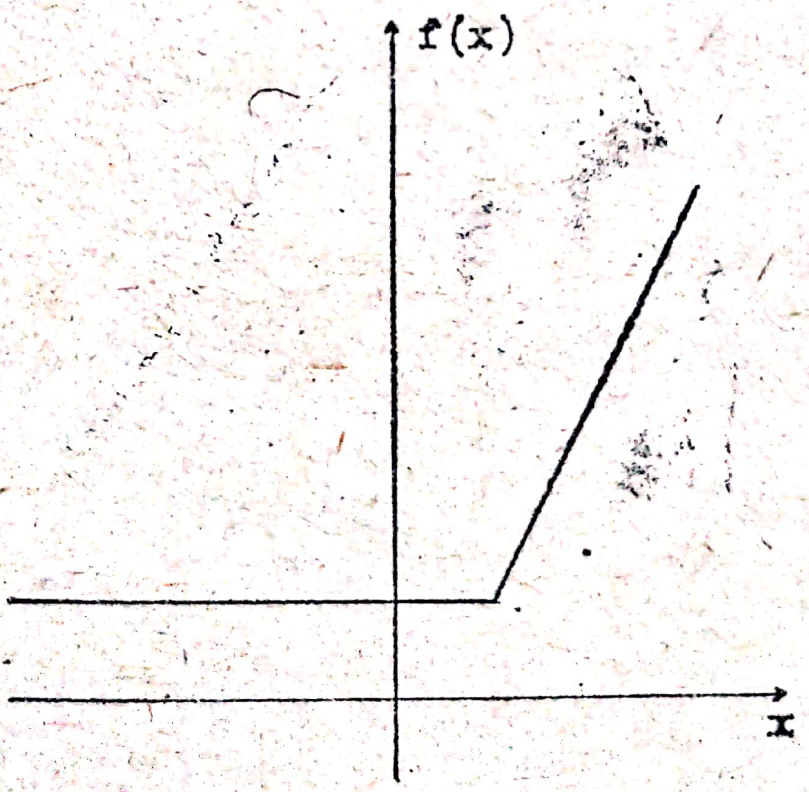
Scanned with OKEN Scanner

Graficul este



c) Avem $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ 2x - 2 & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$

și graficul este



Scanned with OKEN Scanner

d) Explicitînd modulele avem

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{dacă } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{dacă } x < -1 \end{cases} \text{ și } |3-x| = \begin{cases} 3-x & \text{dacă } x \leqslant 3 \\ x-3 & \text{dacă } x > 3 \end{cases}$$

Pentru $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f(x) = -1 - x + 3 - x = -2x + 2$

Pentru $x \in [-1, 3] \Rightarrow f(x) = x + 1 + 3 - x = 4$

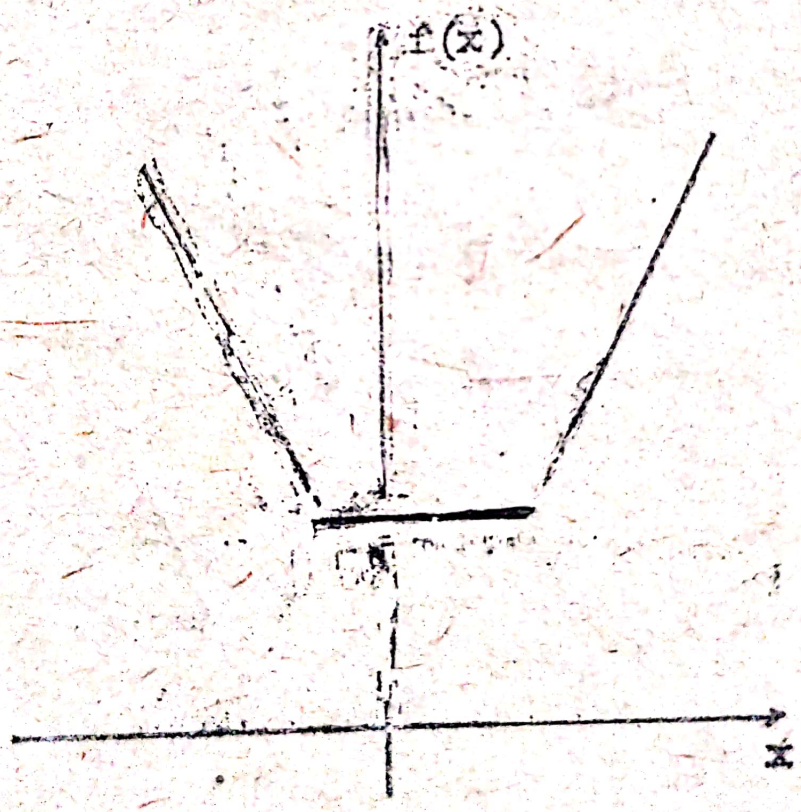
Pentru $x \in (3, \infty) \Rightarrow f(x) = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

Deci $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 4 & \text{dacă } x \in [-1, 3] \\ 2x-2 & \text{dacă } x \in (3, \infty) \end{cases}$

Tabloul de valori pentru trasarea graficului este

x	-3	-2	-1	3	4	5
$f(x)$	8	6	4	4	6	8

Graficul este



e) Procedăm ca la d) și obținem funcția

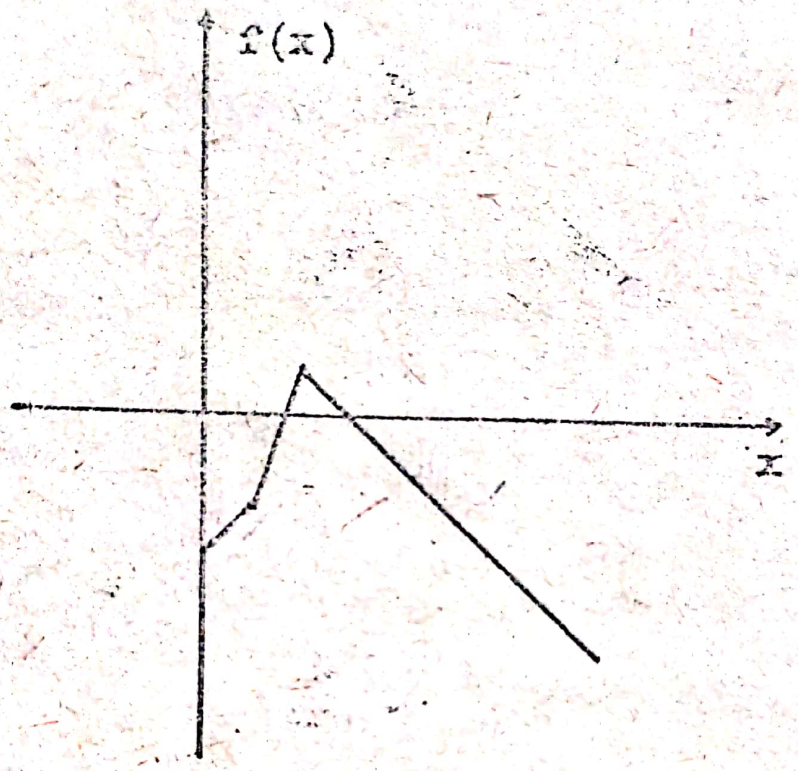
$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 3x-5 & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ -x+3 & \text{dacă } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și tabloul

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	$+\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	0

Graficul este:



A 5. Avem succesiv: $(x(x+6))((x+2)(x+4))+9=y^2 \Leftrightarrow (x^2+6x)((x^2+6x)+8)+9=y^2 \Leftrightarrow (x^2+6x)^2+8(x^2+6x)+16+9-16=y^2 \Leftrightarrow (x^2+6x+4)^2-7=y^2$ adică $(x^2+6x+4-y)(x^2+6x+4+y)=7$

Deci rezolvarea problemei se reduce la rezolvarea sistemelor

$$\begin{cases} x^2+6x+4-y=7 \\ x^2+6x+4+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+6x+4-y=1 \\ x^2+6x+4+y=7 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x^2+6x+4-y=-7 \\ x^2+6x+4+y=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2+6x+4-y=-1 \\ x^2+6x+4+y=-7 \end{cases}$$

După calcule se obțin următoarele soluții: $(0,-3)$, $(-6,-3)$, $(0,3)$, $(-6,3)$, $(-2,3)$, $(-4,3)$, $(-2,-3)$, $(-4,-3)$.

A 6. Avem $a=b+2$ și $a^3-b^3=(b+2)^3-b^3=b^3+6b^2+12b+8-b^3=6b(b+2)+8=8+6ab$.

b) Fie $a = \sqrt[3]{5+x}$, $b = \sqrt[3]{x-3}$. Avem $a - b = 2$ și conform cu a) obținem $a^3 - b^3 = 8 + 6ab$ adică $5 + x - x + 3 = 8 + 6\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{x-3} \Rightarrow 6\sqrt[3]{5+x}\sqrt[3]{x-3} = 0 \Rightarrow x = -5$ sau $x = 3$. Prin verificare directă constatăm că ambele valori sînt soluții.

A 7. Avem $x^4 + 4x^2 + 4 - 2x^3 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x^2 - 3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2x + 1) + 3(x^2 - x + 1) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2 + 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)^2 +$

$+ 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} + 1 \geqslant 0$ ceea ce este evident.

A 8. Ecuația se poate scrie $x^2 + 2x + y^2 - 3 = 0$. Pentru ca ecuația să aibă rădăcini reale este necesar și suficient ca $\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow 4(4 - y^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow y \in [-2, 2]$ și deoarece $y \in \mathbf{Z}$ avem $y \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$.

Caz 1. $y = -2$. Ecuația devine $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Caz 2. $y = -1 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbf{Z}$.

Caz 3. $y = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = 1$.

Caz 4. $y = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbf{Z}$.

Caz 5. $y = 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Deci soluții $(x, y) \in \{(-1, -2), (1, 0), (-3, 0), (-1, 2)\}$.

A 9. Termenii $x_1x_2,\ x_2x_3,\ \ldots,\ x_nx_1$ sînt 1 sau -1 și deoarece suma lor este zero $\Rightarrow$ jumătate din ei sînt 1 și jumătate sînt -1. Deci $n = 2k$, unde k este numărul termenilor egali cu 1 și, deci, și numărul termenilor egali cu -1. Considerăm produsul

$$P = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_nx_1)$$

În acest produs cei k termeni egali cu 1 nu contează și deoarece sînt k termeni egali cu $-1 \Rightarrow P = (-1)^k$. Pe de altă parte

$$P = (x_1x_2)(x_2x_3)\ldots(x_nx_1) = x_1^2x_2^2\ldots x_n^2 = 1$$

Deci $(-1)^k = 1 \Rightarrow k$ par. Fie $k = 2p$. Atunci $n = 2k = 4p$ și deci n este multiplu de 4.

A 10. Din teorema de împărțire a polinoamelor avem:

$5X^3 + 3X^2 + 2X + 2 = I(X)C(X) + 3X + 1$ cu grad $I > 1$

Din enunț grad $I < 3$ și deci grad $I = 2$. Din egalitatea de mai sus avem $5X^3 + 3X^2 - X + 1 = I(X)C(X)$ și deci $I(X)$ divide pe $5X^3 + 3X^2 - X + 1$. Avem $5X^3 + 3X^2 - X + 1 = 5X^3 + 5X^2 - 2X^2 - X + 1 = 5X^2(X+1) - X^2 - X - X^2 + 1 = 5X^2(X+1) - X(X+1) - (X^2 - 1) = (X+1)(5X^2 - X - X + 1) = (5X^2 - 2X + 1)(X + 1)$ și deci $I(X) = 5X^2 - 2X + 1$

Scanned with OKEN Scanner

A 11. Avem $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$ și $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Deci

$$\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x + y)(x^3 + y^3)} = \frac{(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)}{(x + y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + xy}{(x + y)^2}$$

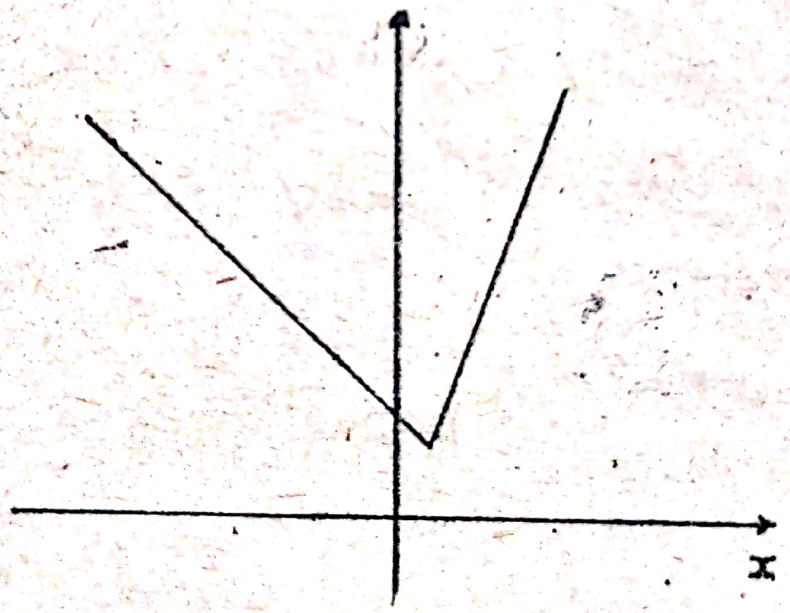
A 12. Să rezolvăm inecuația $3x - 1 \geqslant 2 - x$. Avem $4x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4}$.

Deci pentru $x \geqslant \frac{3}{4} \Rightarrow 3x - 1 \geqslant 2 - x \Rightarrow f(x) = 3x - 1$ și

pentru $x < \frac{3}{4} \Rightarrow 3x - 1 < 2 - x \Rightarrow f(x) = 2 - x$.

Rămîne că $f(x) = \begin{cases} 2 - x \text{ dacă } x < \frac{3}{4} \\ 3x - 1 \text{ dacă } x \geqslant \frac{3}{4} \end{cases}$

cu graficul



A 13. Fie $n^2 + 9n + 14 = k^2 \Leftrightarrow n^2 + 9n + 14 - k^2 = 0$. Pentru ca această ultimă ecuație de gradul al doilea în n să aibă soluții întregi este necesar ca Δ să fie pătrat perfect. Avem $\Delta = 81 - 4(14 - k^2) = 81 - 56 + 4k^2 = u^2$, $u \in \mathbf{Z}$, $\Rightarrow u^2 - 4k^2 = 25$ și deci $(u - 2k)(u + 2k) = 25$. Obținem următoarele cazuri:

Scanned with OKEN Scanner

Caz 1. $u-2k=1$ și $u+2k=25 \Rightarrow u=13$ și $k=6 \Rightarrow n^2+9n+14=36 \Rightarrow n=-11$ și $n=2$.

Caz 2. $u-2k=-1$ și $u+2k=-25 \Rightarrow u=-13$ și $k=-6 \Rightarrow n^2+9n+14=36 \Rightarrow n=-11$ și $n=2$.

Caz 3. $u-2k=5$ și $u+2k=5 \Rightarrow u=5$ și $k=0 \Rightarrow n^2+9n+14=0 \Rightarrow n=-7$ și $n=-2$.

Caz 4. $u-2k=-5$ și $u+2k=-5 \Rightarrow u=-5$ și $k=0 \Rightarrow n^2+9n+14=0 \Rightarrow n=-7$ și $n=-2$.

Caz 5. $u-2k=25$ și $u+2k=1 \Rightarrow u=13$ și $k=-6 \Rightarrow n^2+9n+14=36$ cu aceleași soluții ca la caz 1.

Caz 6. $u-2k=-25$ și $u+2k=-1 \Rightarrow u=-13$ și $k=6 \Rightarrow n^2+9n+14=36 \Rightarrow n=-11$ și $n=2$.

Deci soluții $n\in\{-11, 2, -7, -2\}$.

A 14. Să rezolvăm inecuația $3x+1\geqslant 6-2x \Leftrightarrow 5x\geqslant 5 \Leftrightarrow x\geqslant 1$.

Deci pentru $x\in[1,\infty) \Rightarrow 3x+1\geqslant 6-2x \Rightarrow \min(3x+1,6-2x)=6-2x$ și pentru $x\in(-\infty,1) \Rightarrow 3x+1<6-2x$ de unde $\min(3x+1,6-2x)=3x+1$.

Caz 1. $x\in[1,\infty)$. Avem $f(x)=\max(6-2x, x+2)$. Rezolvînd inecuația $6-2x\geqslant x+2$ obținem $x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]$.

Deci pentru $x\in\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]\cap[1,\infty) \Rightarrow f(x)=6-2x$ și pentru $x\in\left(\frac{4}{3},\infty\right)\cap[1,\infty) \Rightarrow f(x)=x+2$.

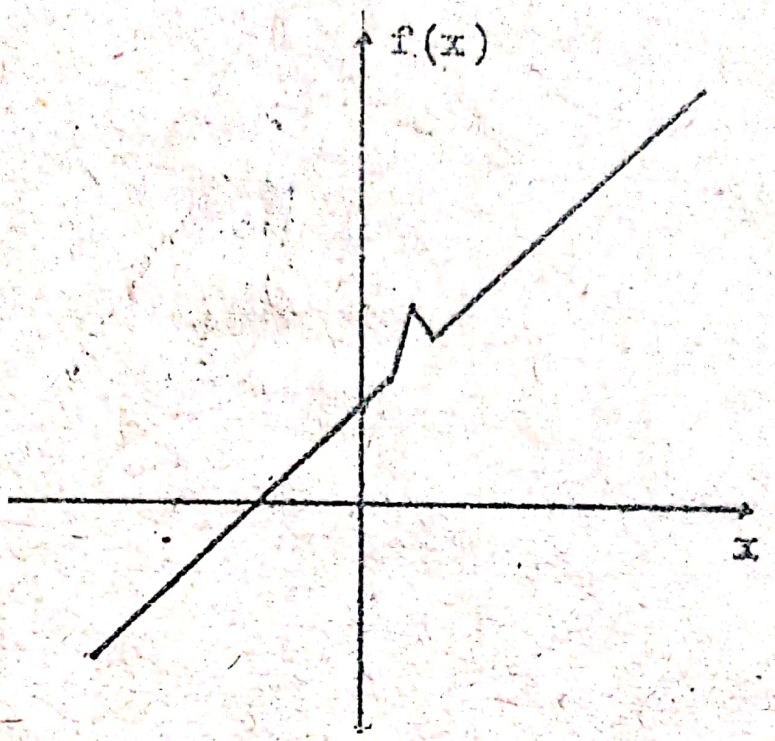
Caz 2. $x\in(-\infty,1)$. Avem $f(x)=\max(3x+1, x+2)$. Rezolvînd inecuația $3x+1\geqslant x+2$ obținem $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$.

Deci $f(x)=3x+1$ pentru $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)\cap(-\infty,1)=\left[\frac{1}{2},1\right)$ și $f(x)=x+2$ pentru $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cap(-\infty,1)=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

În definitiv am obținut, $f(x)=\begin{cases} x+2 \text{ dacă } x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \\ 3x+1 \text{ dacă } x\in\left[\frac{1}{2},1\right) \\ 6-2x \text{ dacă } x\in\left[1,\frac{4}{3}\right] \\ x+2 \text{ dacă } x\in\left(\frac{4}{3},\infty\right) \end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul ei este:



Altfel. Putem rezolva problema și grafic. Reprezentăm grafic funcțiile $f_1, f_2, f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x + 2$, $f_2(x) = 3x + 1$, $f_3(x) = 6 - 2x$. Alegem mai întîi $\min(f_2, f_3) = h$ și apoi $f = \max(h, f_1)$.

A 15. „$\Leftarrow$" este evidentă.

„$\Rightarrow$". Presupunem prin absurd că $x \neq y$ și alegem $x > y \Rightarrow x - y > 0$ și deoarece $x, y \in \mathbf{Z} \Rightarrow x - y \geqslant 1$. Din $0 \leqslant a < 1 \Rightarrow -1 < -a \leqslant 0$ și din $0 \leqslant b < 1 \Rightarrow -1 < b - a < 1$. Avem $x + a = y + b \Rightarrow x - y = b - a$ relație imposibilă deoarece membrul stîng este mai mare decît 1 și membrul drept este mai mic strict decît 1. Deci $x = y$ și din $x + a = y + b \Rightarrow a = b$.

A 16. a) Avem $x = [x] + \{x\}$, unde $\{x\} \in [0, 1)$ este partea fracționară a lui x. Deci $x + 3[x] = \frac{9}{2} \Leftrightarrow [x] + \{x\} + 3[x] = \frac{9}{2} \Rightarrow 4[x] + \{x\} = 4 + \frac{1}{2}$. Din problema anterioară avem $4[x] = 4$ și $\{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow [x] = 1$ și $\{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = [x] + \{x\} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Deci, soluție $x = \frac{3}{2}$.

b) Din $[a] \leqslant a < [a] + 1$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R} \Rightarrow [x + 1] \leqslant x + 1 < [x + 1] + 1 \Rightarrow 1 - x \leqslant x + 1 < 1 - x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - x \leqslant x + 1 \\ x + 1 < 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

și deci $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Deoarece $[x+1] \in \mathbf{Z} \Rightarrow 1 - x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x \in \mathbf{Z}$ și din $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 0$. Se verifică că $x = 0$ este soluție.

c) Fie $f(x) = x + 2$ și $g(x) = 3 - x$ și fie $[f(x)] = [g(x)] = k$. Din $k \leqslant g(x) < k + 1 \Rightarrow -k - 1 < -g(x) \leqslant -k$ și deoarece $k \leqslant f(x) < k + 1 \Rightarrow -1 < f(x) - g(x) < 1$. Deci condiția necesară pentru existența soluției ecuației $[f(x)] = [g(x)]$ este $|f(x) - g(x)| < 1$.

Avem $f(x) - g(x) = x + 2 - 3 + x = 2x - 1$ și deci $|f(x) - g(x)| < 1 \Leftrightarrow |2x - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x < 2 \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow x \in (0, 1)$.

Pentru $x \in (0, 1) \Rightarrow x + 2 \in (2, 3) \Rightarrow [x + 2] = 2 \Rightarrow [3 - x] = 2 \Rightarrow 3 - x \in [2, 3) \Rightarrow 2 \leqslant 3 - x < 3 \Rightarrow -3 < x - 3 \leqslant -2 \Rightarrow 0 < x \leqslant 1 \Rightarrow x \in (0, 1]$ și din $x \in (0, 1)$ rezultă soluția $x \in (0, 1)$.

A 17. Deoarece membrul stîng al ecuației este număr întreg $\Rightarrow x - 1 \in \mathbf{Z}$ și deci $x \in \mathbf{Z}$.

Caz 1. $x = 2k$. Ecuația devine:

$$\left[\frac{\left[\frac{6k-1}{2}\right]+2}{3}\right] = 2k - 1 \Rightarrow \left[\frac{\left[3k - \frac{1}{2}\right]+2}{3}\right] = 2k - 1$$

$$\left[\frac{\left[3k - 1 + \frac{1}{2}\right]+2}{3}\right] = 2k - 1, \quad (1).$$

Observație. Dacă $n \in \mathbf{Z}$ și $x \in [0, 1)$ atunci $[n + x] = n$. Într-adevă $0 \leqslant x < 1 \Rightarrow n \leqslant n + x < n + 1 \Rightarrow [n + x] = n$. Revenind la (1 avem $\left[3k - 1 + \frac{1}{2}\right] = 3k - 1$ și obținem $\left[\frac{3k - 1 + 2}{3}\right] = 2k - 1 \Rightarrow \left[k + \frac{1}{3}\right] = 2k - 1$ și aplicînd din nou observația avem $k = 2k - 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = 2$.

Caz. 2. $x = 2k + 1$. Ecuația devine:

$$\left[\frac{\left[\frac{6k+3-1}{2}\right]+2}{3}\right] = 2k \Rightarrow \left[\frac{[3k+1]+2}{3}\right] = 2k \Rightarrow [k+1] = 2k \Rightarrow k + 1 = 2k \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Soluții $x = 2$ și $x = 3$.

A 18. Considerăm relațiile din enunț ca un sistem de două ecuații cu două necunoscute: $f(x + 1)$ și $g(x - 1)$. Rezolvînd sistemul obținem $f(x + 1) = 2(x + 1)$ și $g(x - 1) = -2x + 10$. Din $f(x + 1) =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 2(x+1)$ punînd $x+1=y$ avem $f(y)=2y$. Din $g(x-1)=$ $=-2x+10$ punînd $x-1=y$ avem $g(y)=-2(y+1)+10=$ $=-2y+8$ și deci $g(y)=-2y+8$.

A 19. a) Avem $|x-1|=3 \Leftrightarrow x-1=3$ sau $x-1=-3 \Leftrightarrow x\in\{-2,4\}$.

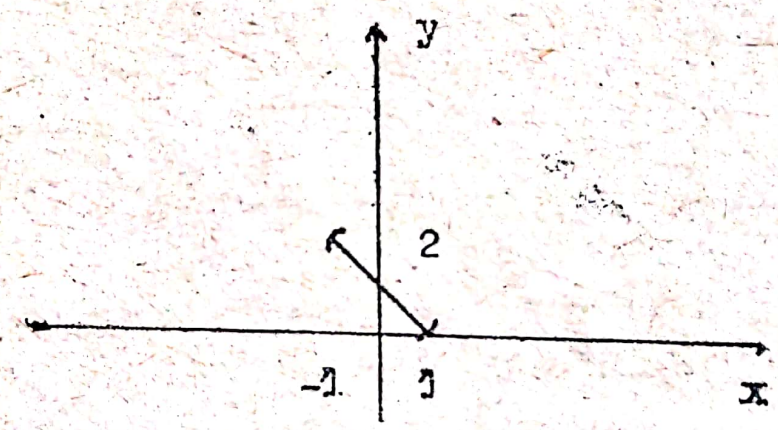
b) Explicitînd modulele și analizînd cazurile se ajunge la soluția $x\in\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$.

c) Ecuația este imposibilă deoarece membrul stîng este pozitiv iar membrul drept strict negativ.

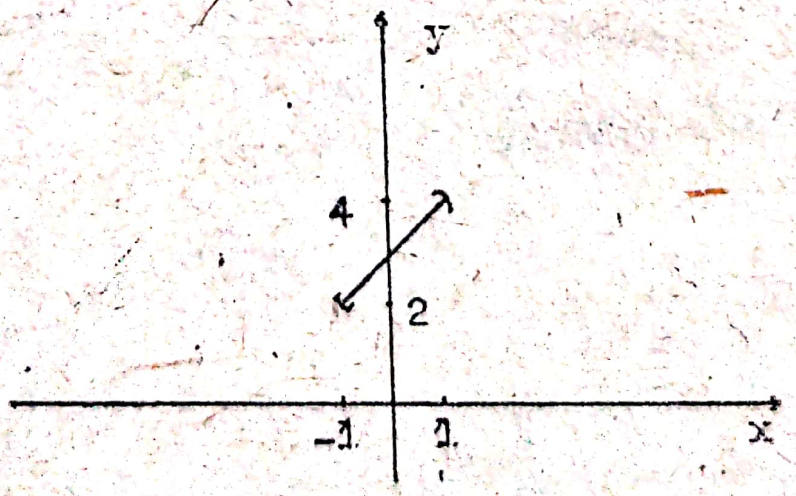
d) Avem $|x-1|=\begin{cases}x-1 \text{ dacă } x\geqslant 1\\ 1-x \text{ dacă } x<1\end{cases}$ și $|y-2|=\begin{cases}y-2 \text{ dacă } y\geqslant 2\\ 2-y \text{ dacă } y<2\end{cases}$

Caz 1. $x\in(-\infty,1)$.

Caz 1.1. $y\in(-\infty,2)$. Ecuația devine $-x+1-y+2=2$ adică $x+y=1\Rightarrow y=1-x$. Reprezentăm grafic dreapta $y=1-x$ și ținem cont că $x\in(-\infty,1)$ și $y\in(-\infty,2)$.



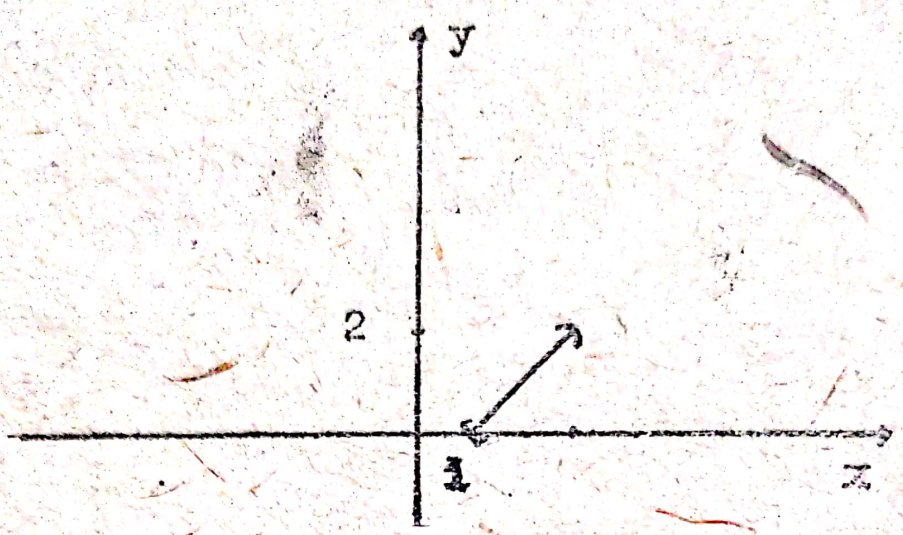
Caz 1.2. $y\in[2,\infty)$. Ecuația devine $-x+1+y-2=2$ de unde $y=x+3$. Reprezentăm grafic dreapta $y=x+3$, ținînd cont că $x\in(-\infty,1)$ și $y\in[2,\infty)$, și avem



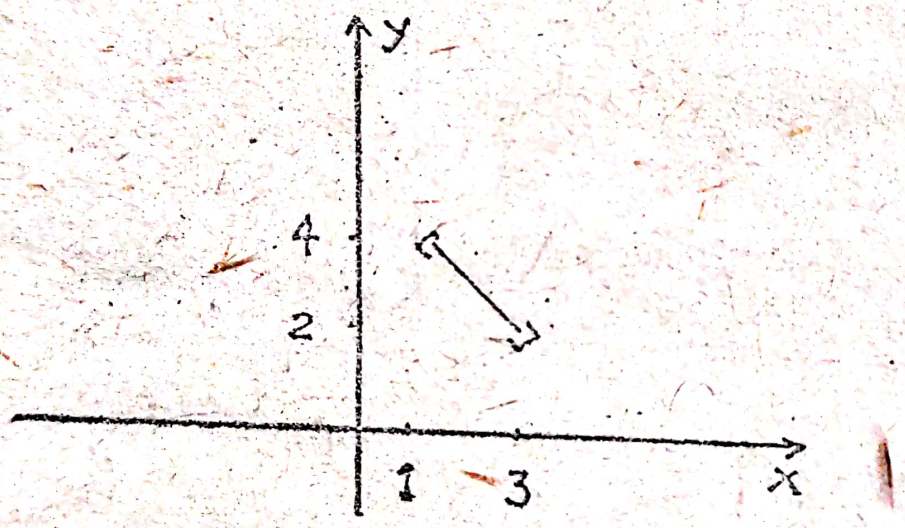
Scanned with OKEN Scanner

Caz 2. $x \in [1,\infty)$.

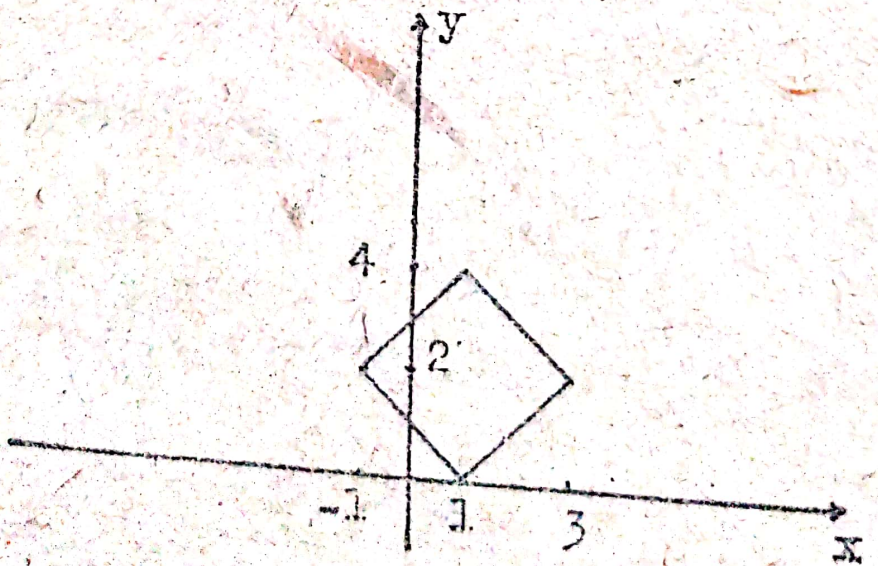
Cat 2.1. $y \in (-\infty,2)$. Ecuația devine $y = x - 1$. Reprezentăm grafic și reținem doar $x \geqslant 1$ și $y < 2$.



Caz 2.2. $y \in [2,\infty)$. Ecuația devine $x + y - 5 = 0$ pe care o reprezentăm grafic și reținem $x \geqslant 1$ și $y \geqslant 2$.



Reunind soluțiile (1), (2), (3) și (4) obținem poligonul soluțiilor.



A 20. a) Deoarece relația dată trebuie să fie adevărată pentru orice x real, în particular ea trebuie să fie adevărată și pentru $x = 0$ și avem $P(1) + aP(-1) = 3 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2$. Mai verificăm că $P(x + 1) - 2P(3x - 1) = -68x^2 - 59x + 3$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. Lăsăm ca exercițiu această verificare.

b) Din același motiv ca la a) punem $x = 0$ și avem $P(0) + aP(P(0)) = 4$ și din $P(0) = a \Rightarrow a + aP(a) = 4$, (1). Dar $P(a) = a^2 + 2a$ și (1) devine $a + a(a^2 + 2a) = 4 \Rightarrow a^3 + 2a^2 + a - 4 = 0 \Rightarrow a^3 - 1 + 2a^2 - 2 + a - 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a^2 + a + 1) + 2(a - 1)(a + 1) + a - 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a^2 + 3a + 4) = 0$. Singura soluție reală este $a = 1$. Mai verificăm (exercițiu !), că

$$P(x) + P(P(x)) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4, \quad (\forall)\ x \in R$$

unde $P(X) = X^2 + X + 1$.

A 21. Avem $P(Q(X)) = Q^6(X) - 4Q^3(X) + 3 = (Q^3(X) - 1)(Q^3(X) - 3) = (Q(X) - 1)(Q^2(X) + Q(X) + 1)(Q^3(X) - 3) = (X^6 - 3X^3 + 1)(Q^2(X) + Q(X) + 1)(Q^3(X) - 3)$ adică $(X^6 - 3X^3 + 1) \mid P(Q(X))$.

A 22. Fie $[2x + 1] = k_1$ și $[3 - x] = k_2$. Avem $k_1 \leqslant 2x + 1 < k_1 + 1$ și $k_2 \leqslant 3 - x < k_2 + 1 \Rightarrow k_1 + k_2 \leqslant x + 4 < k_1 + k_2 + 2$. Dar $k_1 + k_2 = 4$ și deci $4 \leqslant x + 4 < 6 \Rightarrow 0 \leqslant x < 2 \Rightarrow x \in [0, 2)$. Din $x \in [0,2) \Rightarrow 0 \leqslant x < 2 \Rightarrow 0 \leqslant 2x < 4 \Rightarrow 1 \leqslant 2x + 1 < 5 \Rightarrow [2x + 1] \in \{1, 2, 3, 4\}$, (1).

Tot din $x \in [0,2) \Rightarrow 0 \leqslant x < 2 \Rightarrow -2 < -x \leqslant 0 \Rightarrow 1 < 3 - x \leqslant 3 \Rightarrow [3 - x] \in \{1, 2, 3\}$, (2). Din (1) și (2) avem următoarele cazuri:

Caz. 1 $[2x + 1] = 1$. Din ecuația inițială avem $[3 - x] = 3$.

$$\text{Deci } \begin{cases} [2x + 1] = 1 \\ [3 - x] = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant 2x + 1 < 2 \\ 3 \leqslant 3 - x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ x \in (-1, 0] \end{cases} \Rightarrow x \in \{0\}, \ (3).$$

Caz 2. $[2x + 1] = 2 \Rightarrow [3 - x] = 2$ și avem sistemul:

$$\begin{cases} 2 \leqslant 2x + 1 < 3 \\ 2 \leqslant 3 - x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ x \in (0, 1] \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \ (4).$$

Caz 3. $[2x + 1] = 3 \Rightarrow [3 - x] = 1$ și deci avem:

$$\begin{cases} 3 \leqslant 2x + 1 < 4 \\ 1 \leqslant 3 - x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left[1, \frac{3}{2}\right) \\ x \in (1, 2] \end{cases} \Rightarrow x \in \left(1, \frac{3}{2}\right], \ (5).$$

Caz. 4 $[2x + 1] = 4 \Rightarrow [3 - x] = 0$ ceea ce este imposibil din (2).

Din (3), (4) și (5) avem soluția $x \in \{0\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

A 23. Este cunoscut că două ecuații de gradul al doilea au aceleași rădăcini dacă și numai dacă au coeficienții proporționali. În cazul nostru avem

$$\frac{p+1}{2}=\frac{2p+1}{q+4}=-\frac{1}{q}\Leftrightarrow\frac{2}{p+1}=\frac{q+4}{2p+1}=-q, \quad (1)$$

Încercați să rezolvați sistemul (!!).

Să observăm însă că din enunț $p,\ q\in\mathbf{Z}$ și din relația

$\frac{2}{p+1}=-q\Rightarrow\frac{2}{p+1}\in\mathbf{Z}\Rightarrow p+1$ divide pe $2\Rightarrow p+1\in\{\pm 1,\pm 2\}$

Caz 1. $p+1=1\Rightarrow p=0\Rightarrow q=-2$.

Caz 2. $p+1=-1\Rightarrow p=-2\Rightarrow q=2$.

Caz 3. $p+1=2\Rightarrow p=1\Rightarrow q=-1$.

Caz 4. $p+1=-2\Rightarrow p=-3\Rightarrow q=1$.

În toate cazurile sistemul (1) se verifică și deci soluție

$$(p,\ q)\in\{(0,\ -2),\ (-2,\ 2),\ (1,\ -1),\ (-3,\ 1)\}.$$

A 24. Restul împărțirii lui P la $X+2$ este $P(-2)$ și deci $P(-2)=1$. Analog $P(-1)=2$ și $P(1)=-3$. Restul împărțirii lui P ala $(X+2)(X+1)(X-1)$ este de gradul doi, fie el mX^2+nX+p.

Avem

$P(X)=(X+2)(X+1)(X-1)Q(X)+mX^2+nX+p$ și $P(-2)=4m-2n+p=1$, $P(-1)=m-n+p=2$ și $P(1)=m+n+p=-3$. Am obținut astfel sistemul

$$\begin{cases}4m-2n+p=1\\ m-n+p=2\\ m+n+p=-3\end{cases}$$

Rezolvînd sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute astfel format obținem $m=-\frac{7}{6}$, $n=-\frac{5}{2}$, $p=\frac{2}{3}$ și deci, restul împărțirii lui $P(X)$ la $(X+2)(X+1)(X-1)$ este $-\frac{7}{6}X^2-\frac{5}{2}X+\frac{2}{3}$

A 25. Presupunem că există $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=ax+b$ astfel încît $f(1)=2$, $f(2)=-1$ și $f(3)=1$. Am obținut sistemul:

$$a+b=2,\qquad 2a+b=-1,\qquad 3a+b=1$$

Rezolvînd primele două ecuații obținem $a = -3$ și $b = 5$. Înlocuind în ultima relație obținem $3(-3) + 5 = 1 \Rightarrow -4 = 1$ ceea ce este absurd. Deci nu există funcții liniare care trec prin A, B, C, D.

Pentru chestiunea a doua căutăm funcții de forma

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ px + q & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

cu proprietățile $f(1) = 2$, $f(2) = -1$, $f(3) = 1$ și $f(5) = 4$.

Obținem sistemele

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} 3p + q = 1 \\ 5p + q = 4 \end{cases}$$

Rezolvînd obținem $a = -3$, $b = 5$, $p = \frac{3}{2}$, $q = -\frac{7}{2}$.

Am găsit astfel

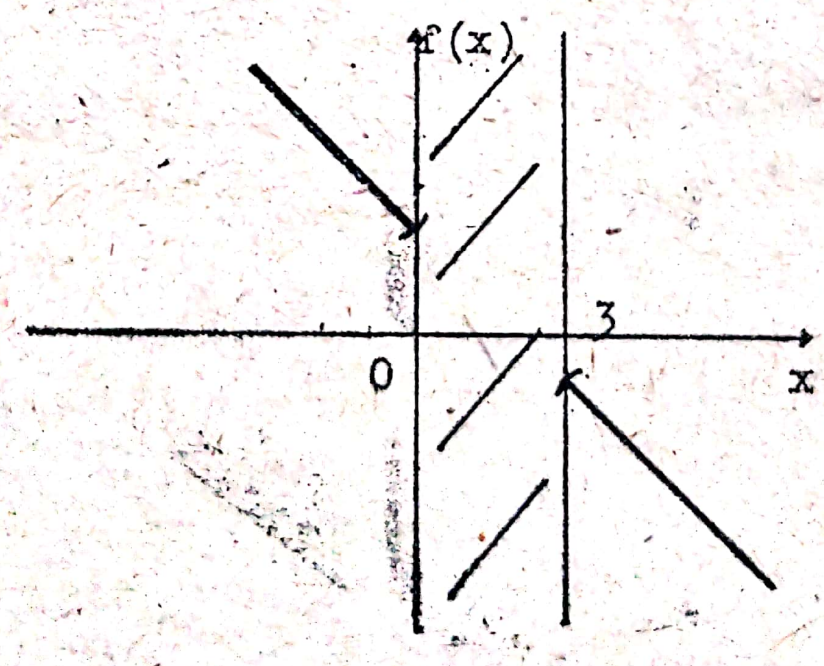
$$f(x) = \begin{cases} -3x + 5 & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

al cărui grafic conține punctele A, B, C, D.

A 26. Pentru toate punctele vom da tabloul de valori și graficul.

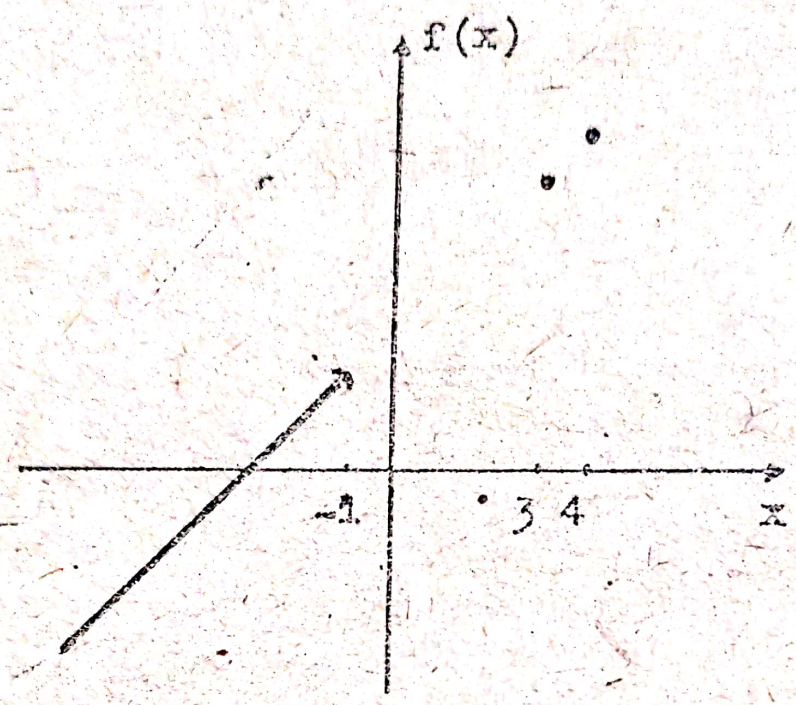
a)

x	-2	-1	0	3	4	5
$f(x)$	4	3	/ / / / / / /		-2	-3



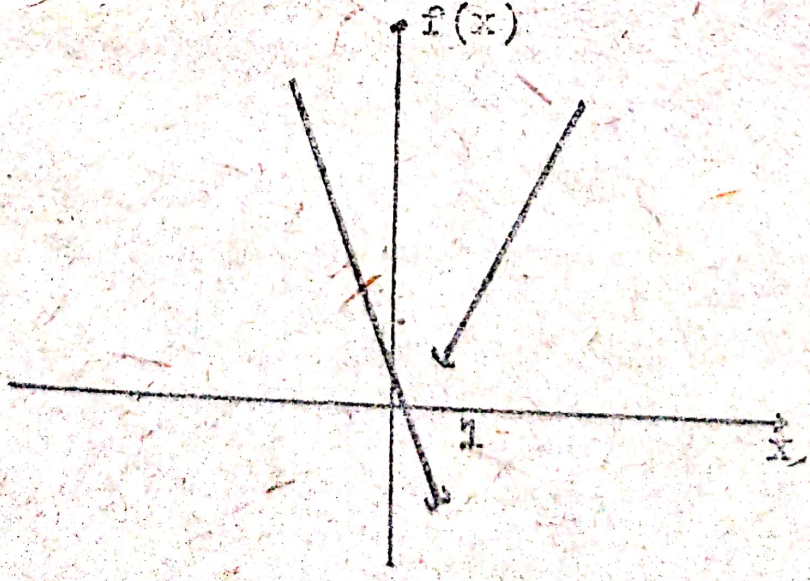
b)

x	-3	-2	-1	3		4	
$f(x)$	0	1	//////	6	////	7	//////



)

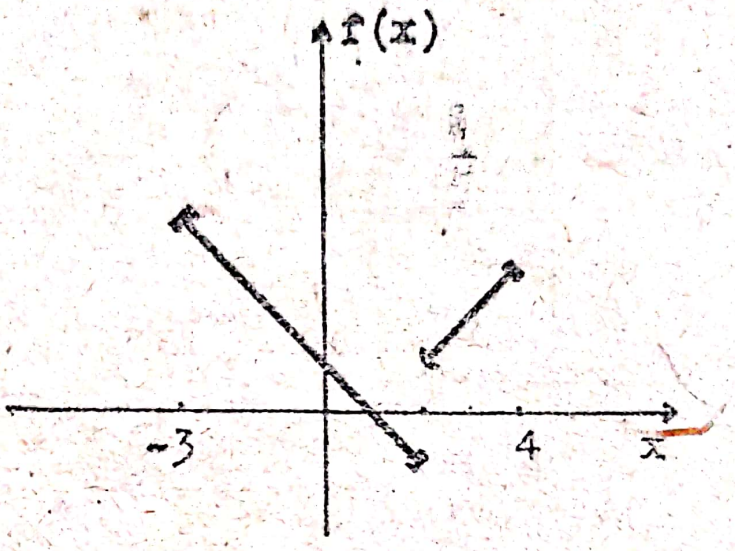
x	0	1	2	8
$f(x)$	1	-2	3	5



Scanned with OKEN Scanner

d)

x	$-\infty$	-3		2		3		4	$+\infty$
$f(x)$	$+$	4	$-$	-1	$+$	2	$-$	3	$+$



A 27. Avem $3xy + 3 = 10x - 5y + 10 \Rightarrow x(3y - 10) = -5y + 7$. Din $y \in N$ rezultă $3y - 10 \neq 0$ și deci $x = \dfrac{-5y + 7}{3y - 10}$, (1). Pentru y real avem

y		$\frac{7}{5}$		$\frac{10}{3}$	
$-5y + 7$	$+$	0	$-$		$-$
$3y - 10$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{-5y + 7}{3y - 10}$	$-$	0	$+$	|	$-$

Din $x, y \in N$ și (1) $\Rightarrow y \in \left[\dfrac{7}{5}, \dfrac{10}{3}\right) \cap N \Rightarrow y \in \{2, 3\}$.

Dacă $y = 2$ atunci $x = \dfrac{3}{4} \notin N$. Dacă $y = 3$ atunci $x = 8$.

Deci, soluția $x = 8$ și $y = 2$.

A 28. Deoarece $y \in N \Rightarrow 3y + 2 \neq 0$ și avem $\dfrac{x}{3} - \dfrac{5x + 1}{3y + 2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3xy + 2x - 15x - 3}{3y + 2} = 0 \Leftrightarrow x(3y - 13) - 3 = 0$. Deoarece $y \in N$

$3y - 13 \neq 0$ și avem $x = \dfrac{3}{3y - 13}$ și din $x > 1 \Rightarrow \dfrac{3}{3y - 13} > 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{3y-13} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-3y+16}{3y-13} > 0$ cu următorul tablou de semn, pentru y real

y		$\frac{13}{3}$		$\frac{16}{3}$	
$-3y+16$	+		+	0	−
$3y-13$	−	0	+		+
$\frac{-3y+16}{3y-13}$	−	|	+	0	−

Deci $y \in \left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}\right)$ și din $y \in \mathbf{N} \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

A 29. Presupunem $x, y \in \mathbf{Z}$. Avem $(x^2+3x)(x^2+3x+2) = y^2 - 2$ și notînd $x^2+3x = t$, obținem $t(t+2) - y^2 + 2 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - y^2 + 2 = 0 \Rightarrow t^2 + 2t + 1 - y^2 + 1 = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = y^2 - 1$ și deoarece $t \in \mathbf{Z}$ fie $y^2 - 1 = k^2 \Rightarrow y^2 - k^2 = 1 \Rightarrow (y-k)(y+k) = 1$ și deci avem de analizat două cazuri:

Caz 1. $y - k = -1$ și $y + k = -1 \Rightarrow y = -1$ și $k = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x^2 + 3x = -1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbf{Z}$

Caz 2. $y - k = 1$ și $y + k = 1 \Rightarrow y = 1$ și $k = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1$ și, la fel ca în caz 1 $\Rightarrow x \notin \mathbf{Z}$.

A 30. Avem $x(x-1)(x+1)(x+2) = 360 \Leftrightarrow (x^2+x)(x^2+x-2) = 360$ și notînd $x^2 + x = y$ avem $y(y-2) = 360 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 360 = 0$ de unde $y_1 = -18$ și $y_2 = 20$.

Pentru $y = -18 \Rightarrow x^2 + x = -18 \Rightarrow x^2 + x + 18 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbf{R}$

Pentru $y = 20 \Rightarrow x^2 + x = 20 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow x_1 = -5$ și $x_2 = 4$.

Deci soluții $x = -5$ și $x = 4$.

A 31. Evident că dacă $y \in \mathbf{Z}$ atunci și $2y \in \mathbf{Z}$, dar nu și reciproc. De asemenea este clar că dacă $2y \notin \mathbf{Z} \Rightarrow y \notin \mathbf{Z}$ (în caz contrar dacă $y \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2y \in \mathbf{Z}$ ceea ce este contradictoriu cu $2y \notin \mathbf{Z}$).

Deci condiția necesară pentru ca $y \in \mathbf{Z}$ este $2y \in \mathbf{Z}$. Din teorema de împărțire obținem $10X + 6 = 5(2X - 7) + 41$ și deci

$$2y = \frac{10x+6}{2x-7} = \frac{5(2x-7)+41}{2x-7} = 5 + \frac{41}{2x-7} \Rightarrow \frac{41}{2x-7} \in \mathbf{Z} \Rightarrow$$

$2x - 7 \in \{\pm 1, \pm 41\}$.

Caz 1. $2x - 7 = 1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 23 \in \mathbf{Z}$.

Caz 2. $2x - 7 = -1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -18 \in \mathbf{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

Caz 3. $2x - 7 = 41 \Rightarrow x = 24 \Rightarrow y = 3 \in \mathbf{Z}$.

Caz. 4. $2x - 7 = -41 \Rightarrow x = -17 \Rightarrow y = 2 \in \mathbf{Z}$.

Deci $A = \{4, 3, 24, -17\}$.

A 32. Fie $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$. Din $P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow P(X) = a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$. Din relația dată pentru $x = 0 \Rightarrow P(0) = Q(0) + Q(1) = 0$ și pentru $x = 1 \Rightarrow P(1) = Q(1) + Q(0) = 0$. Din $P(1) = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ și deoarece toți coeficienții sînt naturali $\Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Deci $P(X) = 0 \Rightarrow P(P(3)) = 0$.

A 33. Avem $x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$ și deoarece acesta divide pe $P(x)$ avem $P(x) = (x - 5)(x + 1)Q(x)$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, $\Rightarrow P(10) = 5 \cdot 11 \cdot Q(10) \Rightarrow 55$ divide pe $P(10)$, adică 55 divide $a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_110 + a_0 = \overline{a_na_{n-1}\ldots a_0}$.

A 34. Putem proceda astfel: fixăm două valori $a \in \mathbf{R}$, diferite de -1, de exemplu $a = 0$ și $a = 1$ și determinăm punctele comune funcțiilor f_0 și f_1. Verificăm apoi care dintre aceste puncte sînt pe toate graficele funcțiilor f_a.

Avem $f_0(x) = x^2 - 1$ și $f_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$ și determinăm punctele comune. Deci $f_0(x) = f_1(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 2$. Punctele de coordonate $(1, f_0(1))$, $(2, f_0(2))$ adică $(1, 0)$, $(2, 3)$ pot fi punctele comune tuturor graficelor funcțiilor f_a. Verificăm $(1, 0)$: $f_a(1) = a + 1 - 3a + 2a - 1 = 0$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R} - \{-1\}$. Deci punctul $(1, 0)$ este pe toate graficele funcțiilor f_a. Verificăm $(2,3)$: $f_a(2) = 4(a + 1) - 6a + 2a - 1 = 3$ și deci punctul $(2, 3)$ este pe toate graficele f_a.

Deci soluție: $(1,0)$, $(2,3)$

Altfel. Observăm că dacă $mx + n = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$ atunci $m = n = 0$. Trebuie determinate punctele de coordonate (α, β) astfel încît $f_a(\alpha) = \beta$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R} - \{-1\}$. Avem $(a + 1)\alpha^2 - 3a\alpha + 2a - 1 = \beta$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R} - \{-1\} \Rightarrow a(\alpha^2 - 3\alpha + 2) + \alpha^2 - 1 - \beta = 0$, $(\forall)\ a \in \mathbf{R} - \{-1\}$. Această relație este adevărată dacă și numai dacă

$$\begin{cases} \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \\ \alpha^2 - 1 - \beta = 0 \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul se obțin soluțiile $\alpha = 1, \beta = 0$ și $\alpha = 2, \beta = 3$,

Deci punctele căutate sînt $(1, 0)$ și $(2,3)$.

A 35. Punctele comune ale funcțiilor f și g sînt rădăcinile ecuației $f(x) = g(x)$. Avem $ax^2 - x + 1 = 2ax - 1 \Leftrightarrow ax^2 - (2a + 1)x + 2 = 0$ și deci, problema s-a redus la discuția numărului de rădăcini reale ale ecuației (1).

Caz 1. $a = 0$. Ecuația (1) devine $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ adică funcțiile $f(x) = -x + 1$ și $g(x) = -1$ au un punct comun de abscisă $x = 2$. Verificați că punctele de coordonate $(2, -1)$ se află pe graficele celor două funcții.

Scanned with OKEN Scanner

Caz 2. $a \neq 0$. Ecuația (1) este o ecuație de gradul al doilea, iar numărul rădăcinilor reale este dat de $\Delta = (2a + 1)^2 - 8a = 4a^2 + 4a + 1 - 8a = (2a - 1)^2$.

Caz 2.1. $a \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta > 0$ și deci sînt două puncte comune distincte de abscise $x_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm (2a - 1)}{2a} \Rightarrow x_1 = 2$ și $x_2 = \frac{1}{a}$.

Caz 2.2. $a = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ ecuația (1) are două rădăcini confundate $x_1 = x_2 = 2$ și deci funcțiile au un punct comun de coordonate (2, 1).

A 36. Determinăm mulțimea A. Se observă că $x = 0$ și $x = 1$ nu sînt soluții și din $x \in N \Rightarrow x \geqslant 2$. Avem $[\sqrt{x}] \leqslant \sqrt{x} < [\sqrt{x}] + 1 \Rightarrow \frac{x-3}{4} \leqslant \sqrt{x} < \frac{x-3}{4} + 1$ de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} x - 3 \leqslant 4\sqrt{x} \\ 4\sqrt{x} < x + 1 \end{cases}$$

Rezolvăm prima inecuație $x - 3 \leqslant 4\sqrt{x}$. Notăm $\sqrt{x} = y$ și din $x > 1 \Rightarrow y > 1$. Avem $y^2 - 3 \leqslant 4y \Leftrightarrow y^2 - 4y - 3 \leqslant 0$. Pentru y avem

y		$2 - \sqrt{7}$		$2 + \sqrt{7}$	
$y^2 - 4y - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Deci $y \in [2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}] \cap (1, \infty) \Rightarrow y \in (1, 2 + \sqrt{7}] \Rightarrow 1 < y \leqslant 2 + \sqrt{7} \Rightarrow 1 < \sqrt{x} \leqslant 2 + \sqrt{7} \Rightarrow 1 < x \leqslant 11 + 4\sqrt{7} = 21{,}6$ și din $x \in N \Rightarrow x \in \{2, 3, 4, \ldots, 21\}$, (1)

Rezolvăm a doua inecuație $4\sqrt{x} < x + 1$. Notăm $\sqrt{x} = y$ și din $x > 1 \Rightarrow y > 1$. Avem $4y < y^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 1 > 0$. Pentru $y \in R$ avem

y		$2 - \sqrt{5}$		$2 + \sqrt{5}$	
$y^2 - 4y + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Deci $y \in (-\infty, 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}, \infty)$ și din $y > 1 \Rightarrow y \in (2 + \sqrt{5}, \infty) \Rightarrow y > 2 + \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x} > 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x > (2 + \sqrt{5})^2 \Rightarrow x > 9 + 4\sqrt{5} > 9 + 4 \cdot 2 = 17$ și din $x \in N \Rightarrow x \in \{18, 19, \ldots\}$, (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow x \in \{18, 19, 20, 21\}$.

Pentru $x = 18$ ecuația devine $18 = 4[\sqrt{18}] + 3 \Rightarrow 18 = 19$, fals.

Pentru $x = 19 \Rightarrow 19 = 4[\sqrt{19}] + 3 \Rightarrow 19 = 19$, adevărat.

Pentru $x = 20 \Rightarrow 20 = 4[\sqrt{20}] + 3 \Rightarrow 20 = 19$, fals.

Pentru $x = 21 \Rightarrow 21 = 4[\sqrt{21}] + 3 \Rightarrow 21 = 19$, fals.

Deci $A = \{19\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Determinăm mulțimea B.

Pentru $x = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow 5([\sqrt[3]{0}])^2 \Rightarrow 0 = 0$ și deci $0 \in B$.

Pentru $x = 1 \Rightarrow 1 = 5$ fals $\Rightarrow 1 \notin B$.

Pentru $x > 1$ notăm $\sqrt[3]{x} = y$, $y > 1$, (2). Avem $x = y^3$ și ecuația devine $y^3 = 5[y]^2 \Rightarrow [y]^2 = \frac{y^3}{5}$. Din $[y] \leqslant y \Rightarrow [y]^2 \leqslant y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y^3}{5} \leqslant y^2 \Rightarrow y^3 \leqslant 5y^2 \Rightarrow y^2(y-5) \leqslant 0 \Rightarrow y \in (-\infty, 5]$ și din (2) $\Rightarrow y \in (1, 5] \Rightarrow 1 < y \leqslant 5 \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{x} \leqslant 5 \Rightarrow 1 < x \leqslant 125$.

Pentru $1 \leqslant x < 8 \Rightarrow 1 \leqslant \sqrt[3]{x} < 2 \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 1$ și ecuația devine $x = 5 \cdot 1 \Rightarrow x = 5$. Prin verificare $5 \in B$.

Pentru $8 \leqslant x < 27 \Rightarrow 2 \leqslant \sqrt[3]{x} < 3 \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 2$ și avem $x = 5 \cdot 4 = 20 \Rightarrow$ și deci $20 \in B$.

Pentru $27 \leqslant x < 64 \Rightarrow 3 \leqslant \sqrt[3]{x} < 4 \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 3$ și $x = 45 \Rightarrow$ $\Rightarrow 45 \in B$.

Pentru $64 \leqslant x < 125 \Rightarrow 4 \leqslant \sqrt[3]{x} < 5 \Rightarrow [\sqrt[3]{x}] = 4$ și $x = 80 \Rightarrow$ $\Rightarrow 80 \in B$.

Pentru $x = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$ și $125 = 5([\sqrt[3]{125}])^2$ este adevărat și $125 \in B$.

În definitiv $B = \{0, 5, 20, 45, 80, 125\}$.

A 37. Deoarece domeniul de valori este $[a, b] \Rightarrow (\forall)\ x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \in$ $\in [a, b]$. Avem $\begin{cases} f(x) \geqslant a \\ f(x) \leqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - a \geqslant 0 \\ b - f(x) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$

$(f(x) - a)(b - f(x)) \geqslant 0 \Rightarrow bf(x) - f^2(x) - ab + af(x) \geqslant 0 \Rightarrow ab \leqslant$ $\leqslant (a+b)f(x) - f^2(x)$ adică ceea ce se cerea.

b) Evident $(\forall)\ x, y \in [a, b] \Rightarrow f(x) \in [a, b]$ și $f(y) \in [a, b] \Rightarrow$

$\begin{cases} a \leqslant f(x) \\ a \leqslant f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - a \geqslant 0 \\ f(y) - a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)f(y) - af(x) - af(y) + a^2 \geqslant 0 \Rightarrow$

$a^2 \geqslant a(f(x) + f(y)) - f(x)f(y)$ q.e.d.

c) Avem $\begin{cases} f(x) \leqslant b \\ f(y) \leqslant b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - f(x) \geqslant 0 \\ b - f(y) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow (b - f(x))(b - f(y)) \geqslant 0 \Rightarrow$

$b^2 - b(f(x) + f(y)) + f(x)f(y) \geqslant 0 \Rightarrow b^2 \geqslant b(f(x) + f(y)) - f(x)f(y)$.

A 38. Din $a^2 + 5a + 1 = 0$ și deoarece evident $a \neq 0$, prin împărțire cu a, avem $a + 5 + \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} = -5$, (1), $\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 =$

$= 25 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 23$, (2). Înmulțim (1) cu (2) și avem

Scanned with OKEN Scanner

$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=-115 \Rightarrow a^3+\frac{1}{a}+a+\frac{1}{a^3}=-115 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=-110$, (3). Ridicăm la pătrat relația (2) și avem

$a^4+\frac{1}{a^4}+2=23^2 \Rightarrow a^4+\frac{1}{a^4}=527$, (4). Din (1) și (4) avem

$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)=-2635 \Rightarrow a^5+\frac{1}{a^3}+a^3+\frac{1}{a^5}=-2635$ și

folosind relația (3) obținem $a^5+\frac{1}{a^5}=-2525$, (5). Din (2), (3), (4)

și (5) avem $E(a)=\frac{23}{-110}\,\frac{527}{-2525}=\frac{12121}{277750}$.

A 39. Deoarece $n(n+1)$ este un număr natural par (numerele n și $n+1$ sînt consecutive și deci unul dintre ele este par) rezultă că $n^2(n+1)^2$ este divizibil prin $4 \Rightarrow A$ este natural.

Avem de analizat cazurile $n=6k$, $n=6k+1$, ..., $n=6k+5$.

Caz 1. $n=6k$. Avem $A=\frac{1}{4}\,36k^2(6k+1)^2(36k^2+12k-1)+3=9k^2(6k+1)^2(36k^2+12k-1)+3=3[3k^2(6k+1)\ldots] \Rightarrow$ $\Rightarrow 3|A$.

Caz. 2. $n=6k+1 \Rightarrow A=\frac{1}{4}(6k+1)^2(6k+2)^2(36k^2+12k)+3=3[(6k+1)^2(3k+1)^24(3k^2+k)+1] \Rightarrow 3|A$.

Lăsăm ca exerciții celelalte cazuri.

A 40. Presupunem că ecuația admite rădăcina rațională $x=\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{Z}$ și $\frac{m}{n}$ fracție ireductibilă, $n \neq 0$. Avem $am^2+bmn+cn^2=0$.

Caz 1: m, n impare $\Rightarrow am^2$, bmn și cn^2 sînt impare iar suma a trei numere impare este un număr impar deci diferit de zero.

Caz 2. m par și n impar $\Rightarrow am^2$ par și bmn par $\Rightarrow am^2+bmn$ par, iar cn^2 impar $\Rightarrow am^2+bmn+cn^2$ impar și deci nenul.

Caz 3. m impar și n par se tratează analog.

A 41. Avem $M=x(a^2-b^2)+3(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(x+3)$. Din a și b impare avem $a=2m+1$ și $b=2p+1$ și $M=(4m^2+4m-4p^2-4p)(x+3)=4(m-p)(m+p+1)(x+3)$. Evident $4|M$. Mai demonstrăm că 2 divide pe $(m-p)(m+p+1)(x+3)=:L$.

Caz 1. m, p pare $\Rightarrow m-p$ este par $\Rightarrow 2$ divide pe $m-p \Rightarrow 2|L$.

Caz 2. m, p impare $\Rightarrow m-p$ este par $\Rightarrow 2 \mid (m-p) \Rightarrow 2 \mid L$.

Scanned with OKEN Scanner

Caz 3. m par, n impar $\Rightarrow m+p$ impar $\Rightarrow m+p+1$ par $\Rightarrow 2|L$.

Caz 4. m impar, n par este analog cazului 3.

A 42. Deoarece relația este simetrică în a, b, c și sînt distincte putem presupune că $a > b > c$ și fiind mai mari decît $2 \Rightarrow a > b > c \geqslant 2$ și deci $b \geqslant 3$ și $a \geqslant 4$.

Avem $a \geqslant 4 \Rightarrow a^2 \geqslant 16 \Rightarrow \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{1}{a^2} \geqslant -\frac{1}{16} \Rightarrow 1-\frac{1}{a^2} \geqslant \frac{15}{16}$, (1).

Din $b \geqslant 3 \Rightarrow b^2 \geqslant 9 \Rightarrow \frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{1}{b^2} \geqslant -\frac{1}{9} \Rightarrow 1-\frac{1}{b^2} \geqslant \frac{8}{9}$, (2).

Din $c \geqslant 2 \Rightarrow c^2 \geqslant 4 \Rightarrow \frac{1}{c^2} \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{c^2} \geqslant -\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\frac{1}{c^2} \geqslant \frac{3}{4}$, (3).

Din (1), (2) și (3) avem

$$\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right) \geqslant \frac{15}{16}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ q.e.d.}$$

A 43. Din $a+b=1 \Rightarrow a = 1-b$. Avem $a^3+b^3 = (1-b)^3+b^3 = 1-3b+3b^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}-3b+3b^2 = \frac{1}{4}+3\left(\frac{1}{2}-b\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}$, deoarece $\left(\frac{1}{2}-b\right)^2 \geqslant 0$.

A 44. În cursul soluției vom folosi algoritmul lui Euclid.

Caz 1. Cel mai mare divizor comun este de gradul al doilea.

După algoritmul de împărțire cu rest avem

$$P(X) = Q(X)(X-1) + (3-b)X + a + b$$

Avem $(3-b)X + a + b = 0 \Rightarrow 3-b=0$ și $a+b=0$ de unde $a=-3$ și $b=3$.

Caz 2. Cel mai mare divizor comun este de gradul unu. Continuînd algoritmul lui Euclid început în caz 1 obținem

$$Q(X) = ((3-b)X + a + b) + \frac{1}{3-b}X + \frac{3-a-2b}{(3-b)^2} + R$$

unde $R = b - \frac{(a+b)(3-a-2b)}{(3-b)^2}$ este restul împărțirii.

Impunem condiția ca R să fie zero.

Caz 3. Dacă R anterior este diferit de zero atunci polinoamele sînt prime între ele.

Scanned with OKEN Scanner

A 45. a) Avem evident $(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \geqslant 0$ și
$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geqslant 0$.

Din prima relație avem

$a^4 + b^4 + c^4 + a^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geqslant 2abc\,(a + b + c)$, (1)

și din a doua obținem

$2(a^4 + b^4 + c^4) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \geqslant 0$

$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2 \geqslant 0$. (2)

Din (1) și (2) prin adunare și simplificare cu 2 avem

$$a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc\,(a + b + c) \Rightarrow \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc} \geqslant a + b + c, \quad (3)$$

b) Din $a + b + c = 1$ și (3) $\Rightarrow 1 \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}$ și deci $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc$

c) Din $abc = 1$ și (3) $\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a + b + c$.

A 46. Avem $P(a) + P(b) = a^2 + b^2 + 80$ și $P(a) - P(b) = (a - b)(a + b) \geqslant 1$

Distingem două cazuri.

Caz 1. $a - b \neq 1 \Rightarrow a + b \neq 1 \Rightarrow (a + b) \mid (P(a) - P(b))$

Caz 2. $a - b = 1 \Rightarrow P(a) + P(b) = 2b(b + 1) + 81$.

Dacă $b = 3k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow P(a) - P(b) = 3(2k(3k + 1) + 27)$

Dacă $b = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow P(a) + P(b) = 2b - 1 = 2(3k + 1) + 1 = 3(2k + 1)$

Dacă $b = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow P(a) - P(b) = 3[2(3k + 2)(k + 1) + 27]$

A 47. Avem $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1$, (1). Dacă $x > 4 \Rightarrow x - 3 > 1 \Rightarrow (x - 3)^2 > 1 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 > 1$ ceea ce este în contradicție cu (1). Deci $x \leqslant 4$ și din $x \in [3, \infty) \Rightarrow x \in [3, 4]$. Analog se obține $y \in [3, 4]$.

Din $x \in [3, 4] \Rightarrow x - 1 \in [2, 3]$.

Din $y \in [3, 4] \Rightarrow y - 1 \in [2, 3] \Rightarrow \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y - 1} \leqslant \frac{1}{2}$.

Avem $\begin{cases} 2 \leqslant x - 1 \leqslant 3 \\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{y - 1} \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant \frac{x - 1}{y - 1} \leqslant \frac{3}{2}$

și deci cea mai mică valoare a lui $\frac{x - 1}{y - 1}$ este $\frac{2}{3}$ realizată pentru $x = 3$ și $y = 4$, iar cea mai mare valoare este $\frac{3}{2}$ realizată pentru $x = 4$ și $y = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

A 48. Avem $Q(X) = I(X)C_1(X) + 5X + 11$ și deci $I(X)C_1(X) = X^3 + X - 10 = (X - 2)X^2 + 2X + 5)$. Rezultă că $I(X)$ divide produsul

$$(X - 2)(X^2 + 2X + 5)$$

și deoarece gradul lui $I(X)$ este mai mare sau egal cu 2 avem că $I(X) = X^2 + 2X + 5$ sau $I(X) = (X - 2)(X^2 + 2X + 5)$. Prin verificare directă avem $I(X) = X^2 + 2X + 5$.

A 49. Fie $Q(X) = P(X + 2)$. Atunci restul împărțirii lui $P(X + 2)$ la $X - 1$ este restul împărțirii lui $Q(X)$ la $X - 1$ și deci restul căutat este $Q(1) = P(3)$. Avem $P(3) = 739$ și deci restul căutat este 739.

A 50. Trebuie determinată o funcție $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel ca $h(f(m)) = g(m)$ pentru orice $m \in \mathbf{R}$. Căutăm o funcție de gradul întîi. Fie deci $h(x) = ax + b$. Avem $h(f(m)) = g(m) \Rightarrow af(m) + b = g(m) \Rightarrow a(2m + 3) + b = 5 - m \Rightarrow m(2a + 1) + 3a + b - 5 = 0$, $(\forall)$, $m \in \mathbf{R}$.

Condiția necesară și suficientă este $\begin{cases} 2a + 1 = 0 \\ 3a + b - 5 = 0 \end{cases}$

de unde obținem $a = -\frac{1}{2}$ și $b = \frac{13}{2}$ și deci $h(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$.

Verificare. $h(f(m)) = -\frac{1}{2}f(m) + \frac{13}{2} = -\frac{1}{2}(2m + 3) + \frac{13}{2} = g(m)$.

Deci orice punct de coordonate $(f(m), g(m))$ aparține graficului funcției h, așadar răspunsul la prima chestiune este DA.

Reciproc. Fie (α, β) un punct pe graficul lui h adică $h(\alpha) = \beta$. Avem $-\frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2} = \beta$. Se determină m astfel încît

$$(\alpha, \beta) = (f(m), g(m)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = \alpha \\ g(m) = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = \alpha \\ g(m) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} 2m + 3 = \alpha \\ -m + 5 = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{13}{2} \end{cases}$ ceea ce este un sistem de două ecuații cu o necunoscută. Din prima ecuație avem $m = \frac{\alpha - \beta}{2}$ care verifică și a doua relație. Deci răspunsul la chestiunea a 2-a DA.

A 51. Notăm cu A și B cele două numere și avem succesiv.

$A \cdot B = (2^{2n+1} + 1)^2 - 2^{2n+2} = 2^{4n+2} + 1 = 4^{2n+1} + 1$. Se știe că suma $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ se divide cu $a + b$. Deci $A \cdot B$ este diviizibil

Scanned with OKEN Scanner

cu 5 pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că cel puțin unul din numerele A sau B se divide cu 5. Dacă presupunem că ambele numere se divid cu 5, rezultă că 5 divide și diferența $A - B$, ceea ce este imposibil deoarece $A - B = 2^{n+2}$ care nu se divide cu 5.

A 52. Avem

$$f(x+4) = \begin{cases} 2(x+4) - 1 & \text{dacă } x + 4 \leqslant 1 \\ 3 - (x+4) & \text{dacă } x + 4 > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x+4) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{dacă } x \leqslant -3 \\ -x - 1 & \text{dacă } x > -3 \end{cases}$$

De asemenea

$$f(5-x) = \begin{cases} 2(5-x) - 1 & \text{dacă } 5 - x \leqslant 1 \\ 3 - (5-x) & \text{dacă } 5 - x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(5-x) = \begin{cases} 9 - 2x & \text{dacă } x \geqslant 4 \\ x - 2 & \text{dacă } x < 4 \end{cases}$$

Deosebim următoarele cazuri.

Caz 1. $x \in (-\infty, -3]$. Ecuația devine $2(2x + 7) + 3(x - 2) = 8 \Rightarrow 7x + 8 = 8 \Rightarrow x = 0$ care nu este soluție deoarece $0 \notin (-\infty, -3]$.

Caz 2. $x \in (-3, 4)$. Ecuația devine $2(-x - 1) + 3(x - 2) = 8 \Rightarrow x = 16$ care nu este soluție deoarece $16 \notin (-3, 4)$.

Caz 3. $x \in [4, \infty)$. Ecuația devine $2(-x - 1) + 3(9 - 2x) = 8 \Rightarrow x = 2$ care nu este soluție deoarece $2 \notin [4, \infty)$.

Deci ecuația nu are soluții.

A 53. Procedînd ca la exercițiul 52 obținem:

$$f(x+2) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{dacă } x \leqslant -1 \\ 1 - 2x & \text{dacă } x > -1 \end{cases}$$

și

$$f(x+1) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 3 - 2x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Distingem următoarele cazuri:

Caz 1. $x \in (-\infty, -1]$. Ecuația devine $3(3x + 7) - 4(3x + 4) = 9$ cu soluția $x = -\frac{4}{3} \in (-\infty, -1]$.

Caz 2. $x \in (-1, 0]$. Ecuația devine $3(1 - 2x) - 4(3x + 4) = 9$ cu soluția $x = -\frac{22}{18} \notin (-1, 0]$.

Scanned with OKEN Scanner

Caz 3. $x \in (0, \infty)$. Ecuația devine $3(1 - 2x) - 4(3 - 2x) = 9$ cu soluția $x = 9 \in (0, \infty)$.

Deci soluții $x = -\frac{4}{3}$ și $x = 9$.

A 54. Analog cu exercițiul 52 obținem:

$$f(x+1) = \begin{cases} 1 - x & \text{dacă } x \leqslant -3 \\ 2x + 1 & \text{dacă } -3 < x < 2 \\ 1 - 3x & \text{dacă } x \geqslant 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(2 - x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geqslant 4 \\ 3 - 2x & \text{dacă } -1 < x < 4 \\ 3x - 2 & \text{dacă } x \leqslant -1 \end{cases} \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem următoarea distribuție pe axa reală

$$-\infty \qquad -3 \qquad -1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad +\infty$$

Caz 1. $x \in (-\infty, -3]$. Ecuația devine $2(1 - x) - 3(3x - 2) = 3$ cu soluția $x = \frac{5}{11} \notin (-\infty, -3]$.

Caz 2. $x \in (-3, -1]$. Ecuația devine $2(2x + 1) - 3(3x - 2) = 3$ cu soluția $x = 1 \notin (-3, -1]$.

Caz 3. $x \in (-1, 2)$. Ecuația devine $2(2x + 1) - 3(3 - 2x) = 3$ cu soluția $x = 1 \in (-1, 2)$.

Caz 4. $x \in [2, 4)$. Ecuația devine $2(1 - 3x) - 3(3 - 2x) = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow -7 = 3$ ceea ce este imposibil.

Caz 5. $x \in [4, \infty)$. Ecuația devine $2(1 - 3x) - 3x = 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{9} \notin [4, \infty)$.

În concluzie soluția ecuației este $x = 1$.

A 55. Obținem

$$f(x+2) = \begin{cases} -3x - 4 & \text{dacă } x \leqslant -3 \\ x + 3 & \text{dacă } -3 < x \leqslant 2 \\ -x + 1 & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

Caz 1. $x \in (-\infty, -3]$. Inecuația devine $-9x - 13 \leqslant 0 \Rightarrow x \in$ $\in \left(-\frac{13}{9}, \infty\right)$ și din $x \in (-\infty, -3]$ avem $x \in \left(-\frac{13}{9}, \infty\right) \cap$ $\cap (-\infty, -3] = \Phi$

Scanned with OKEN Scanner

Caz 2. $x \in (-3, 2]$. Inecuația devine $3x + 7 \leqslant 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right]$ și deci $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cap (-3, 2] = \left(-3, -\frac{7}{3}\right]$.

Caz 3. $x \in (2, \infty)$. Inecuația devine $2 - 3x \leqslant 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$ și deci $x \in (2, \infty) \cap \left[\frac{2}{3}, \infty\right) = (2, \infty)$

Reunind soluțiile din cazurile studiate avem

$$x \in \left(-3, -\frac{7}{3}\right] \cup (2, \infty).$$

A 56. Avem

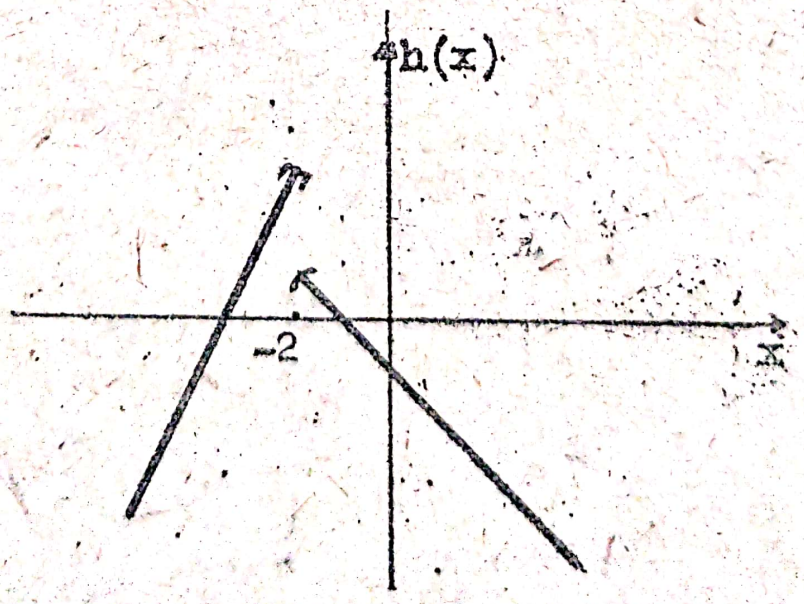
$$f(x+4) = \begin{cases} 2(x+4) - 1 & \text{dacă } x + 4 \leqslant 2 \\ 3 - (x+4) & \text{dacă } x + 4 > 2 \end{cases}$$

$$h(x) = f(x+4) = \begin{cases} 2x + 7 & \text{dacă } x \leqslant -2 \\ -x - 1 & \text{dacă } x > -2 \end{cases}$$

Tabloul de valori este

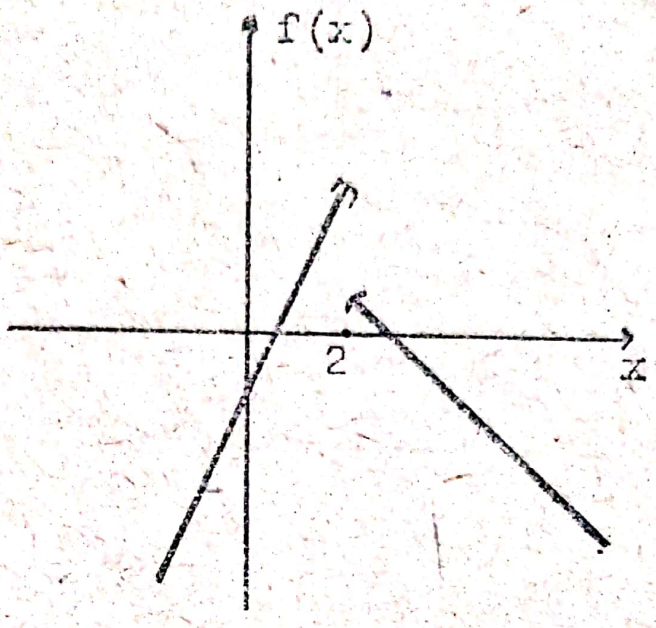
x	-3	-2	-1	0
$h(x)$	1	3	0	-1

Graficul este



Scanned with OKEN Scanner

Observație. Să trasăm și graficul funcției f.



Comparați graficele funcțiilor f și h. Se observă că graficul funcției h se poate obține din graficul funcției f translatîndu-l la stînga cu 4 unități.

A 57. După calculul lui $f(x-3)$ și explicitarea modulului avem.

$$h(x)=\begin{cases} x+1 & \text{dacă } x\in(-\infty,2] \\ 11-3x & \text{dacă } x\in(2,4) \\ x-5 & \text{dacă } x\in[4,5) \\ 4-x & \text{dacă } x\in[5,\infty) \end{cases}$$

Lăsăm ca exercițiu trasarea graficului.

A 58. Presupunem că există $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încît $f(x)+f(1-x)=6x$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Pentru $x=0\Rightarrow f(0)+f(1)=0$, (1). Pentru $x=1\Rightarrow f(1)+f(0)=6$, (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow 6=0$ ceea ce este absurd. Deci nu există funcții cu proprietatea enunțată.

A 59. Presupunem că există astfel de funcții.

Luăm în relația de la b) $x=0$ și avem $f(0)\,f(1)=f(0)\Rightarrow f(0)(f(1)-1)=0\Rightarrow f(0)=0$ sau $f(1)=1$.

Caz 1. $f(0)=0$. În a) luăm $x=\frac{1}{2}\Rightarrow f(1)+f(0)=0\Rightarrow f(1)=0$

În b) punem $x=1\Rightarrow f(1)f(0)=f(1)-1\Rightarrow f(1)=1$ ceea ce este contradictoriu.

Caz 2. $f(1)=1$. În a) punem $x=\frac{1}{2}\Rightarrow f(1)+f(0)=0\Rightarrow f(0)=-1$

În b) luăm $x=1\Rightarrow f(1)f(0)=f(1)-1\Rightarrow f(0)=0$ ceea ce este în contradicție cu $f(0)=-1$.

În ambele cazuri am ajuns la contradicții. Deci nu există funcții cu proprietățile enunțate.

Scanned with OKEN Scanner

A 60. După exprimarea funcțiilor $f(x-1)$ și $f(2-x)$ ca la exercițiul 52 se ajunge la

$$h(x)=\begin{cases}12x-17 & \text{dacă } x\in(-\infty,\ 0)\\ 2x-3 & \text{dacă } x\in[0,3\ ]\\ -13x+21 & \text{dacă } x\in(3,\ \infty)\end{cases}$$

Lăsăm pe seama cititorului reprezentarea grafică.

A 61. Pentru $x=0\Rightarrow f(0)-f(1)=0$
Pentru $x=1\Rightarrow f(1)-f(2)=2\cdot 1$
Pentru $x=2\Rightarrow f(2)-f(3)=2\cdot 2$
. . . . . .
Pentru $x=49\Rightarrow f(49)-f(50)=2\cdot 49$

Adunăm toate egalitățile anterioare și obținem:

$$f(0)-f(50)=2(1+2+\ldots+49), \qquad (1)$$

Calculăm $S=1+2+\ldots+n$. Scriind S începînd cu ultimul termen avem:

$$\begin{array}{l} S=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1\\ S=1+2+3+\ldots+(n-1)+n\\ \hline 2S=n+1+n+1+n+1+\ldots+n+1+n+1\end{array}$$

și deci $2S=n(n+1)\Rightarrow S=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pentru $n=49\Rightarrow 1+2+\ldots+49=\dfrac{49\cdot 50}{2}=1225$. Ținînd seama și de $f(0)=0\Rightarrow -f(50)=2450\Rightarrow f(50)=-2450$.

A 62. În relația dată facem succesiv $x=0,\ x=1,\ \ldots,\ x=48$ și avem

$$\begin{aligned} f(0)-2f(1)+f(2)&=3^0=1\\ f(1)-2f(2)+f(3)&=3^1\\ f(2)-2f(3)+f(4)&=3^2\\ f(3)-2f(4)+f(5)&=3^3\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f(47)-2f(48)+f(49)&=3^{47}\\ f(48)-2f(49)+f(50)&=3^{48}\end{aligned}$$

Sumînd pînă la penultima relație avem

$$f(49)+f(0)-f(1)=1+3^1+3^2+\ldots+3^{47}, \qquad (1).$$

Calculăm $S=x+x^2+x^3+\ldots+x^n$. Avem $xS=x^2+x^3+\ldots+x^{n+1}$ și prin scădere $S(1-x)=x-x^{n+1}$ și pentru $x\neq 1$ avem $S=x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x-x^{n+1}}{1-x}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{47} = \frac{3 - 3^{48}}{-2} = \frac{3^{48} - 3}{2}$ și din (1)

$f(49) = 1 + \frac{3^{48} - 3}{2}$

Înlocuind acum în ultima relație avem

$$-2\left(1 + \frac{3^{48} - 3}{2}\right) + f(50) = 3^{48}$$

de unde $f(50) = 2 \cdot 3^{48} - 1$.

A 63. În relația a doua punem $x \to -x$ și în relația a treia $x \to x + 1$.

$$f(2 + x) - 2g(3 - x) + h(2 - x) = -2x + 8$$
$$f(2 + x) - 2g(3 - x) + h(2 - x) = 9x + 1$$
$$f(2 + x) - 2g(3 - x) + h(2 - x) = 9x$$

Relațiile anterioare le interpretăm ca un sistem de 3 ecuații cu trei necunoscute $f(2 + x)$, $g(3 - x)$ și $h(2 - x)$. Rezolvînd sistemul obținem:

$f(2 + x) = 2x + 5$, $g(3 - x) = x - 1$, $h(2 - x) = -2x + 1$

Punem $2 + x = y \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow f(y) = 2y + 1$.
Punem $3 - x = y \Rightarrow x = 3 - y \Rightarrow g(y) = 2 - y$.
Punem $2 - x = y \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow h(y) = 2y - 3$.

A 64. Avem $E(x) = x^2 - \frac{2}{m}x + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{m + 1}{m} = \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 - \frac{1}{m^2} + 1 + \frac{1}{m} = \left(x - \frac{1}{m}\right)^2 + 1 + \frac{m - 1}{m}$. Deoarece $\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 \geqslant 0$ și $m - 1 > 0$ rezultă $E(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

A 65. a) Evident $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geqslant 0 \Rightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geqslant 0 \Rightarrow x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$, (1).

b) În (1) luăm $x = a^2$ și $y = b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, (2). Tot în (1) punem $x = c^2$ și $y = d^2 \Rightarrow c^2 + d^2 \geqslant 2cd$, (3). Din (2) + (3) avem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 2(ab + cd)$, (4).

În (1) luăm $x = ab$ și $y = cd$ și ținînd seama că $abcd = 1$ avem $ab + cd \geqslant 2\sqrt{abcd} = 2$, (5) și din (4) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4$, (6). În (1) punem $x = ac$ și $y = bd \Rightarrow ac + bd \geqslant 2\sqrt{abcd} = 2$, (7). Tot în (1) luăm $x = ad$ și $y = bc \Rightarrow ad + bc \geqslant 2$, (8).

Din (5), (6), (7) și (8) prin adunare obținem relația cerută.

A 66. a) În (1) facem $x = 0$ și avem $P(-1) = -P(0) + 2$, (2), și $x = 1 \Rightarrow 2P(0) = 2 \Rightarrow P(0) = 1$, (3), și înlocuind în (2) avem $P(-1) = -1 + 2 = 1$, (4). Deci $P(0) = P(-1) = 1$ ceea ce arată că resturile împărțirii lui $P(X)$ la X și la $X + 1$ sînt egale.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie $P(X) = (X+1)Q(X) + mX + n$. Din $P(0) = 1 \Rightarrow n = 1$ și din $P(-1) = 1 \Rightarrow -m + n = 1 \Rightarrow -m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$. Deci $P(X) = X(X+1)Q(X) + 1$ și deoarece grad $P = 2 \Rightarrow$ grad $Q = 0$ și deci $Q(X) = k$.

Rămîne că $P(X) = kX(X+1) + 1 = kX^2 + kX + 1$.

A 67. Deoarece membrul drept al ecuației este întreg rezultă că membrul stîng este întreg și deci $x - 6$ sau $6 - x$ sînt numere întregi $\Rightarrow$ $\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, (1). Fie $k_1 = \left[\frac{x-1}{2}\right]$, $k_2 = \left[\frac{x-2}{2}\right]$, $k_3 = \left[\frac{x-3}{2}\right]$ $k_4 = \left[\frac{x-4}{2}\right]$. Avem

$$k_1 \leqslant \frac{x-1}{2} < k_1 + 1 \quad \text{și} \quad k_2 \leqslant \frac{x-2}{2} < k_2 + 1$$

$$k_3 \leqslant \frac{x-3}{2} < k_3 + 1 \quad \text{și} \quad k_4 \leqslant \frac{x-4}{2} < k_4 + 1$$

și prin adunare obținem.

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \leqslant \frac{4x-10}{2} < k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 4 \Rightarrow |x - 6| \leqslant 2x - 5 < |x - 6| + 4, \quad (2)$$

Caz 1. $x \in [6, \infty)$. Atunci (2) devine $x - 6 \leqslant 2x - 5 < x - 6 + 4 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - 6 \leqslant 2x - 5 \\ 2x - 5 < x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 3)$$

și din condiția cazului rezultă $x \in [-1, 3) \cap [6, \infty) = \Phi$ adică nu există soluții ale ecuației date în intervalul $[6, \infty)$.

Caz 2. $x \in (-\infty, 6)$. Atunci (2) devine $6 - x \leqslant 2x - 5 < 6 - x + 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x \leqslant 2x - 5 \\ 2x - 5 < 10 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 11 \geqslant 0 \\ 3x - 15 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \in \left[\frac{11}{3}, \infty\right) \\ x \in (-\infty, 5) \end{array}$$

Deci $x \in \left[\frac{11}{3}, 5\right)$ și din (1) $\Rightarrow x = 4$. Prin verificarea directă în ecuația inițială se obține că $x = 4$ este soluție.

A 68. Fie $3 + 2x = y \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow f(y) = \left|\frac{y-3}{2} + 1\right| = \frac{1}{2}|y + 1|$.

Am obținut

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} & \text{dacă } y \geqslant 1 \\ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} & \text{dacă } y < 1 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul funcției este ușor de trasat.

A 69. În relația dată facem $x \to -x$ și $f(-x) + 3f(x) = |-x+2|$. Am obținut astfel următorul sistem.

$$\begin{cases} f(x) + 3f(-x) = |x+2| \\ 3f(x) + f(-x) = |-x+2| \end{cases}$$

Rezolvînd sistemul acem $f(x) = \frac{1}{8}[3|2-x| - |x+2|]$.

Avem

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x \text{ dacă } x \leqslant 2 \\ x-2 \text{ dacă } x > 2 \end{cases} \text{ și } |x+2| = \begin{cases} x+2 \text{ dacă } x \geqslant -2 \\ -x-2 \text{ dacă } x < -2 \end{cases}$$

Caz. 1 $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f(x) = \frac{4-x}{4}$

Caz 2. $x \in [-2, 2] \Rightarrow f(x) = \frac{1-x}{2}$

Caz 3. $x \in (2, \infty) \Rightarrow f(x) = \frac{x-4}{4}$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{4} \text{ dacă } x \in (-\infty, -2) \\ \frac{1-x}{2} \text{ dacă } x \in [-2, 2] \\ \frac{x-4}{4} \text{ dacă } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

A 70. Ecuația dată se scrie $2(x+y)^2 + (x-y)^2 = 664$. Notăm $x+y = u$ și $x-y = v$, $u, v \in \mathbf{N}$, (1). Avem $2u^2 + v^2 = 664 \Rightarrow v^2 = 664 - 2u^2$ adică v^2 este par și deci v este par, fie $v = 2v_1$ și avem $2u^2 + 4v_1^2 = 664 \Rightarrow u^2 + 2v_1^2 = 332 \Rightarrow u^2 = 332 - 2v_1$ adică u^2 este par și deci u este par, fie $u = 2u_1$, cu $v_1, u_1 \in \mathbf{N}$ și avem $4u_1^2 + 2v_1^2 = 332 \Rightarrow 2u_1^2 + v_1^2 = 166 \Rightarrow v_1^2 = 166 - 2u_1^2 \Rightarrow v_1^2$ este par $\Rightarrow v_1$ par, fie $v_1 = 2v_2$, $v_2 \in \mathbf{N} \Rightarrow 4v_2^2 = 166 - 2u_1^2 \Rightarrow 2v_2^2 = 83 - u_1^2 \Rightarrow u_1^2 = 83 - 2v_2^2$. Dacă u_1 ar fi par atunci $2|83$ ceea ce nu se poate și deci u_1 este impar. Pe de altă parte $u_1^2 \leqslant 83 \Rightarrow u_1 \leqslant 9 \Rightarrow u_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \Rightarrow 2v_2^2 \in \{82, 74, 58, 34, 2\} \Rightarrow v_2^2 \in \{41, 37, 29, 17, 1\}$. Dar singurul pătrat este 1 și deoarece $v_2 \in \mathbf{N} \Rightarrow v_2 = 1 \Rightarrow v_1 = 2 \Rightarrow v = 4$ și $u = 18$.

Revenind avem $x+y = 18$ și $x-y = 4 \Rightarrow x = 11$ și $y = 7$.

Scanned with OKEN Scanner

A 71. Din $x = 1$ rădăcină rezultă $m + n + 2 = 0$, (1). Din $x = 2$ rădăcină, rezultă $4m + 2n + 9 = 0$, (2). Din (1) și (2) rezultă sistemul

$$\begin{cases} m + n = -2 \\ 4m + 2n = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2 - m \\ 4m + 2(-2 - m) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1/2 \\ m = -5/2 \end{cases}$$

Ecuația devine $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$.

Avem succesiv $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 2x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 3x - 2x + 2 = 2x^2(x - 1) - 3x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 2) = (x - 1)(2x^2 - 4x + x - 2) = (x - 1)(x - 2)(2x + 1)$. Deci ecuația dată este echivalentă cu $(x - 1)(x - 2)(2x + 1) = 0$ de unde se obține și a treia rădăcină $x = -\frac{1}{2}$.

A 72. Condiția de existență este: $3|x| - x^2 + 2 \neq 0$. Pentru a determina domeniul rezolvăm ecuația $3|x| - x^2 + 2 = 0$.

Caz 1. $x \in [0, \infty)$. Ecuația devine $3x - x^2 + 2 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \notin [0, \infty)$ și $x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \in [0, \infty)$.

Deci $-x^2 + 3x + 2 \neq 0$ pentru $x \in [0, \infty) - \left\{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$.

Caz 2. $x \in (-\infty, 0)$. Ecuația devine $-3x - x^2 + 2 = 0$ cu o singură rădăcină acceptabilă $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

Deci $-3x - x^2 + 2 \neq 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) - \left\{\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}\right\}$.

Rămîne că, domeniul de definiție este

$$R - \left\{\pm \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}.$$

A 73. Determinăm mulțimea A. Problema se reduce la rezolvarea ecuației $x^2 + 3|x| + 2 = 0$.

Caz 1. $x \in [0, \infty)$. Avem $x^2 + 3|x| + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = -2$ și deci pentru orice $x \in [0, \infty)$ avem că $x^2 + 3|x| + 2 \neq 0$.

Caz 2. $x \in (-\infty, 0)$. Avem $x^2 + 3|x| + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $x = 2$ și deci $(\forall)\, x \in (-\infty, 0) \Rightarrow x^2 + 3|x| + 2 \neq 0$.

Rămîne că $A = \varnothing$.

Determinăm mulțimea B. Problema se reduce la rezolvarea ecuației $x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0$.

Caz 1. $x \in [1, \infty)$. Avem $x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(x - 1) - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \notin [1, \infty)$ și $x_2 = 2 \in [1, \infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

Caz 2. $x \in (-\infty, 1)$. Ecuația devine $x^2 + 2(1 - x) - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \notin (-\infty, 1)$ și $x_2 = -1 \in (-\infty, 1)$.

Deci $B = \{2, -1\}$.

A 74. În triunghiul ABM, $x + y \geqslant c$ deci $(x + y)^n \geqslant c^n$ sau

$$x^n y^n (x + y)^n \geqslant x^n y^n c^n, \quad (1).$$

În triunghiul BMC, $y + z \geqslant a$ deci $(y + z)^n \geqslant a^n$ sau

$$y^n z^n (y + z)^n \geqslant y^n z^n a^n, \quad (2).$$

În triunghiul AMC, $x + z \geqslant b$ deci $(x + z)^n \geqslant b^n$ sau

$$x^n z^n (x + z)^n \geqslant x^n z^n b^n, \quad (3).$$

Adunăm relațiile (1), (2) și (3) și obținem

$x^n y^n (x + y)^n + y^n z^n (y + z)^n + x^n z^n (x + z)^n \geqslant c^n x^n y^n + a^n y^n z^n + b^n x^n z^n$ de unde, împărțind cu $x^n y^n z^n$ avem

$$\frac{(x + y)^n}{z^n} + \frac{(y + z)^n}{x^n} + \frac{(x + z)^n}{y^n} \geqslant \frac{a^n}{x^n} + \frac{b^n}{y^n} + \frac{c^n}{z^n}$$

A 75. Sistemul se scrie echivalent astfel

$$\begin{cases} mx + my - 3m + x - y = 2 \\ 2mx - my + 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)x + (m - 1)y = 3m + 2 \\ 2(m + 1)x - (m - 1)y = 4 \end{cases}$$

Adunînd relațiile obținem $3(m + 1) = 3m + 6 \Leftrightarrow (m + 1)\, x = m + 2$.

Dacă $m \neq -1$ atunci $x = \dfrac{m + 2}{m + 1}$.

Înmulțind prima relație cu -2 și adunîndu-le obținem:

$-3(m - 1)\, y = -6m - 4 + 4 \Leftrightarrow (m - 1)\, y = 2m$.

Dacă $m \neq 1$ atunci $y = \dfrac{2m}{m - 1}$

Deci pentru $m \neq 1$ și $m \neq -1$ soluțiile sînt

$$x = \frac{m + 2}{m + 1} \text{ și } y = \frac{2m}{m - 1}.$$

Dacă $m = 1$ sistemul devine:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 2 - x + y \\ 2x - y = 4 - 2x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ 4x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ x = 1 \end{cases}$$

ceea ce este imposibil și deci pentru $m = 1$ sistemul nu are soluții.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m = -1$ sistemul devine

$$\begin{cases} -x - y + 3 = 2 - x + y \\ -2x + y = 4 - 2x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/2 \\ y = 2 \end{cases}$$

ceea ce este imposibil.

b) Avem $x = \dfrac{m+2}{m+1} = \dfrac{m+1+1}{m+1} = 1 + \dfrac{1}{m+1} \Rightarrow x - 1 = \dfrac{1}{m+1}$ și din $x \in \mathbf{Z}$ rezultă $(m+1) \mid 1 \Rightarrow m + 1 = 1$ sau $m + 1 = -1 \Rightarrow m = 0$ sau $m = -2$.

Pentru $m = 0 \Rightarrow x = 2$ și pentru $m = -2 \Rightarrow x = 0$.

De asemenea $y = \dfrac{2m}{m-1} = \dfrac{2m-2+2}{m-1} = 2 + \dfrac{2}{m-1}$ și din $y \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ avem $(m-1) \mid 2 \Rightarrow m - 1 = \pm 1$ și $m - 1 = \pm 2$.

Dacă $m - 1 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 4$.
Dacă $m - 1 = -1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = 0$.
Dacă $m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow y = 3$.
Dacă $m - 1 = -2 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow y = 1$.
În definitiv $m \in \{0, -2, 4, 3, 1\}$.

A 76. a) Avem succesiv $||x - 1| - 3| = 2 \Leftrightarrow |x - 1| - 3 = 2$ sau $|x - 1| - 3 = -2 \Leftrightarrow |x - 1| = 5$ sau $|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 5$ sau $x - 1 = -5$ sau $x - 1 = 1$ sau $x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 6$ sau $x = -4$ sau $x = 2$ sau $x = 0$.
Deci $x \in \{6, -4, 2, 0\}$.

b) Explicitînd modulul $|x - 1|$ avem:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{dacă } x \in [1, \infty) \\ 1 - x & \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

Caz 1. $x \in [1, \infty)$. Ecuația devine $|x + x - 1| = |x - 2| \Leftrightarrow |2x - 1| = |x - 2|$. Din $x \geqslant 1 \Rightarrow 2x \geqslant 2 \Rightarrow 2x - 1 \geqslant 1$ și deci $|2x - 1| = 2x - 1$. Avem $2x - 1 = |x - 2| \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2$ sau $2x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 1$. Deoarece sîntem în cazul $x \geqslant 1$ rezultă $x = 1$ convine.

Caz 2. $x \in (-\infty, 1)$. Ecuația devine $|x + 1 - x| = |x - 2| \Leftrightarrow 1 = |x - 2| \Leftrightarrow x - 2 = 1$ sau $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 3$ sau $x = 1$. Deoarece în acest caz $x < 1$ rezultă că nu sînt soluții.
Deci soluție unică $x = 1$.

A 77. Fie $x = 1 + \sqrt{2}$ de unde $x - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 1 \Rightarrow x^2 = 2x + 1$, (1). Ridicînd (1) la pătrat avem $x^4 = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ și folosind din nou (1) avem $x^4 = 4(2x + 1) + 4x + 1 = 12x + 5$, (2). Ridicînd (2) la pătrat avem $x^8 = (12x + 5)^2 = 144x^2 + 120x + 25$ și din (1) avem $x^8 = 144(2x +$

Scanned with OKEN Scanner

$+ 1) + 120x + 25 = 408x + 169$, (3). Ridicînd (3) la pătrat avem $x^{16} = (408x + 169)^2 = 166464x^2 + 137904x + 28561$ și din (1) avem $x^{16} = 166\,464\,(2x + 1) + 137\,904x + 28\,561 = 470\,832x + 195\,025$. Deoarece $x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^{16} = 470\,832\,(1 + \sqrt{2}) + 195\,025$ și deci

$$x^{16} = 665\,857 + 470\,832\sqrt{2}.$$

A 78. Avem sistemul:

$$\begin{cases} 3n - 2 = (2m)^2 \\ 5m + 6 = (2m + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n - 2 = 4m^2 \\ 5n + 6 = 4m^2 + 8m + 4 \end{cases}$$

Scăzînd prima relație din a doua obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 2n + 8 = 8m + 4 \\ 3n - 2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4m - 2 \\ 3n - 2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4m - 2 \\ 4m^2 - 12m + 8 = 0 \end{cases}$$

Rezolvînd a doua ecuație avem $m_1 = 1$, $m_2 = 2 \Rightarrow n_1 = 2$, $n_2 = 6$.
Pentru $n = 2 \Rightarrow 3n - 2 = 2^2$ și $5n + 6 = 16 = 4^2$.
Pentru $n = 6 \Rightarrow 3n - 2 = 16 = 4^2$ și $5n + 6 = 36 = 6^2$.
Deci soluții $n = 2$ și $n = 6$.

A 79. Pentru ca $n^4 + 4$ să fie prim trebuie ca el să nu admită ca factori decît pe 1 și pe el însuși. Descompunem $n^4 + 4$ în factori. $n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.
Există două posibilități: $n^2 - 2n + 2 = 1$ sau $n^2 + 2n + 2 = 1$.
Dacă $n^2 - 2n + 2 = 1$ atunci $n^2 - 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n - 1)^2 = 0$ $n = 1 \in \mathbb{N}$
Dacă $n^2 + 2n + 2 = 1$ atunci $n^2 + 2n + 1 = 0 \Rightarrow (n + 1)^2 = 0 \Rightarrow n = -1 \notin \mathbb{N}$.
Deci pentru $n = \pm 1$ numărul $n^4 + 4$ este prim, și deoarece n este natural rezultă soluția unică $n = 1$.

A 80. Restul împărțirii lui $P(X)$ la $X - m$ este $P(m) = am^2 + bm + c$.
Dacă pentru orice m, $am^2 + bm + c = 3k_m$ atunci, în particular, acest fapt este adevărat și pentru $m = 0, -1, 2$.
Pentru $m = 0 \Rightarrow c = 3k_0$ și deci c este multiplu de 3 fie acesta $c = 3q$.
Pentru $m = 1 \Rightarrow a + b + 3q = 3k_1$.
Pentru $m = 2 \Rightarrow 4a + 2b + 3q = 3k_2$.
Am obținut astfel sistemul

$$\begin{cases} a + b = 3(k_1 - q) \\ 4a + 2b = 3(k_2 - q) \end{cases}$$

Înmulțind prima relație cu -2 și adunîndu-le avem

$$2a = -6(k_1 - k_0) + 3(k_2 - k_0) = 3(-2k_1 + k_2 - k_0)$$

de unde rezultă că $3 \mid 2a$ și deoarece 3 și 2 sînt prime între ele rezultă $3 \mid a$. Fie $a = 3p$ atunci din prima relație a sistemului avem $b = -a + 3(k_1 - q) = -3p + 3(k_1 - q) = 3(-p + k_1 - q)$ adică $3 \mid b$.

Scanned with OKEN Scanner

A 81. Se știe că pentru orice a real avem $[a] \leqslant a < [a] + 1$.
Avem $[x] \leqslant x < [x] + 1 \Rightarrow 3[x] \leqslant 3x < 3[x] + 3$ și deci

$$3[x] \leqslant 3x < 3[x] + 3$$
$$[y] \leqslant y < [y] + 1$$

Prin adunarea acestor două relații obținem

$$3[x] + [y] \leqslant 3x + y < 3[x] + [y] + 4$$

și ținînd cont că $3[x] + [y] = 5$ avem

$$5 \leqslant 3x + y < 9 \Leftrightarrow 3x + y \in [5, 9), \quad (1)$$

Din $[y] \leqslant y < [y] + 1$ avem $-[y] - 1 < -y < -[y]$ și înmulțind cu 3 avem $-3[y] - 3 \leqslant -3y < -3[y]$. Avem astfel

$$-3[y] - 3 \leqslant -3y < -3[y]$$
$$2[x] \leqslant 2x < 2[x] + 2$$

Prin adunarea acestor ultime relații avem

$$2[x] - 3[y] - 3 < 2x - 3y < 2[x] - 3[y] + 2$$

și ținînd seama că $2[x] - 3[y] = -4$ obținem

$$-7 < 2x - 3y < -2 \Leftrightarrow 2x - 3y \in (-7, -2), \quad (2).$$

Din (1) avem $5 \leqslant 3x + y < 9 \Rightarrow 15 \leqslant 9x + 3y < 27$ și ținînd seama de (2) obținem

$$15 \leqslant 9x + 3y < 27$$
$$-7 \leqslant 2x - 3y < -2$$

de unde prin adunare avem $8 < 11x < 25 \Leftrightarrow \frac{8}{11} < x < \frac{25}{11} \Leftrightarrow 0{,}7 < x < 2{,}2$ și deci $[x] \in \{0, 1, 2\}$.

Caz 1. $[x] = 0$. Sistemul devine

$$\begin{cases} [y] = 5 \\ -3[y] = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [y] = 5 \\ [y] = 4/3 \end{cases}$$

ceea ce este imposibil.

Caz 2. $[x] = 1$. Sistemul devine

$$\begin{cases} 3 + [y] = 5 \\ 2 - 3[y] = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [y] = 2 \\ [y] = 2 \end{cases}$$

Deci $x = 1$ și $y = 2 \Rightarrow x \in [1, 2)$ și $y \in [2, 3)$.

Scanned with OKEN Scanner

Caz ß. $[x] = 2$. Sistemul devine

$$\begin{cases} 6 + [y] = 5 \\ 4 - 3[y] = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [y] = -1 \\ [y] = 8/3 \end{cases}$$

ceea ce este imposibil.

Soluție $x \in [1, 2)$ și $y \in [2, 3)$.

A 82. Înmulțind ecuația a doua cu $m - 3$ și adunînd-o cu prima, obținem $(2m - 3)\, x = \dfrac{4\,(2m - 3)}{m}$. Dacă $m \neq 3/2$ avem $x = 4/m$. Dacă $m = 3/2$ sistemul devine

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}\, x + \dfrac{3}{2}\, y = \dfrac{13}{2} \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{13}{3} \\ x + y = 3 \end{cases}$$

și deci este imposibil.

Pentru y obținem $y = \dfrac{m + 1}{3 - m}$.

Pentru chestiunea a doua analizînd x constatăm că m poate fi $1, -1, 2, -2, 4, -4$.

Dacă $m = -1 \Rightarrow x = -4$ și $y = 0$.

Dacă $m = 1 \Rightarrow x = 4$ și $y = 1$.

Dacă $m = 2 \Rightarrow x = 2$ și $y = 3$.

Dacă $m = -2 \Rightarrow x = -2$ și $y = -\dfrac{1}{5}$ și $m = -2$ nu convine.

Dacă $m = 4 \Rightarrow x = 1$ și $y = -5$.

Dacă $m = -4 \Rightarrow x = -1$ și $y = -\dfrac{3}{7}$ și $m = -4$ nu convine.

În final $m \in \{-1, 1, 2, 4\}$.

A 83. Din $x^3 + x - 1 = 0$ avem $x^3 = 1 - x$, (1). În continuare $x^4 = xx^3 = x\,(1 - x) = x - x^2$, (2) și $x^5 = xx^4 = x\,(x - x^2) = x^2 - x^3 = x^2 - 1 + x \Rightarrow x^5 = x^2 + x - 1$; (3).

Folosind (1), (2) și (3) în E avem

$$E = \frac{x - x^2 - 2\,(1 - x) + x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 1 - x^2 - x + 2} = \frac{8}{1} = 8$$

și deci E este constantă egală cu 3.

A 84. Prin calcul elementar se găsesc $x_1 = -1$ și $x_2 = -8\,(2m + 1)$.

b) Avem $x_1^2 + x_2^2 = 1 + 9\,(2m + 1)^2 = 2\,(18m^2 + 18m + 5)$ și inecuația este echivalentă cu $2\,(18m^2 + 18m + 5) < \dfrac{10m}{8}\, 8\,(2m + 1)$.

După calcule avem $8m^2 + 13m + 5 < 0 \Leftrightarrow 8m^2 + 8m + 5m + 5 < 0 \Leftrightarrow 8m(m+1) + 5(m+1) < 0 \Leftrightarrow (m+1)(8m+5) < 0$ cu următorul tablou de semn.

m		-1		$-\frac{5}{8}$	
$m+1$	$-$	0	$+$		$+$
$8m+5$	$-$		$-$	0	$+$
$(m+1)(8m+5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Deci soluție $m \in \left(-1, -\frac{5}{8}\right)$.

A 85 Condițiile de existență sînt

$$\begin{cases} x^2+3x+2 \neq 0 \\ x^2+5x+4 \neq 0 \\ x^2+4x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \text{ și } x \neq -2 \\ x \neq -4 \text{ și } x \neq -1 \\ x \neq -3 \text{ și } x \neq -1 \end{cases}$$

Deci domeniul de existență al expresiei este $\mathbf{R} - \{-1, -2, -3, -4\}$.
Avem succesiv următoarele descompuneri:

$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$; $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$;
$x^2+6x+8 = (x+2)(x+4)$; $x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$;
$x^2+7x+12 = (x+4)(x+3)$; $x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$.

Înlocuind în E avem

$$E = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)} + \frac{(x+2)(x+4)}{(x+1)(x+4)} - \frac{(x+4)(x+3)}{(x+3)(x+1)}$$

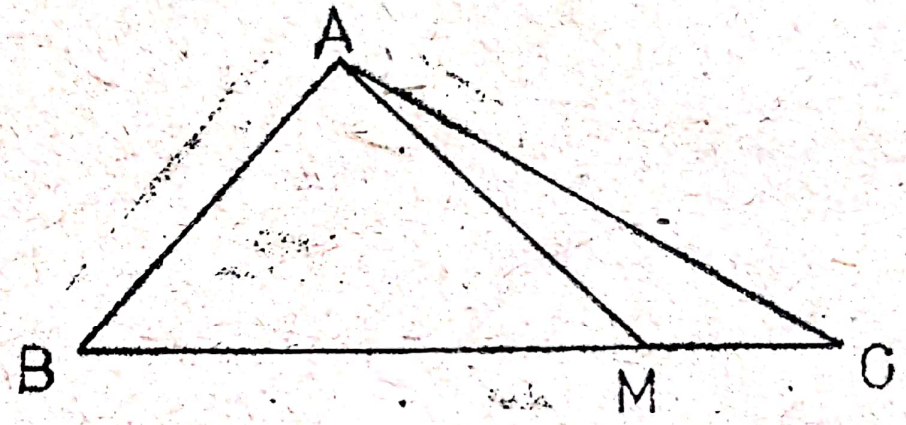
și, după simplificări, obținem

$$E = \frac{x+3}{x+1} + \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+4}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE PLANĂ

P 1.



Din $BM = 3\,MC$ şi $BM + MC = 8$ rezultă $BM = 6$ şi $MC = 2$.

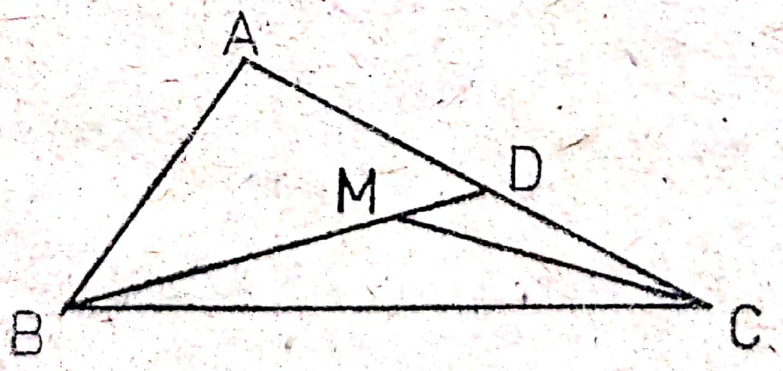
În triunghiul ABC aplicăm teorema lui Stewart:

$$AB^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC + AC^2 \cdot MB = MB \cdot MC \cdot BC$$

Înlocuind şi efectuind calculele se ajunge la $AM^2 = 19$.

P 2. Vom da mai întîi două observaţii.

Observaţia **1.** Fie $M \in \text{Int } ABC$. Atunci $BM + MC < BA + AC$.



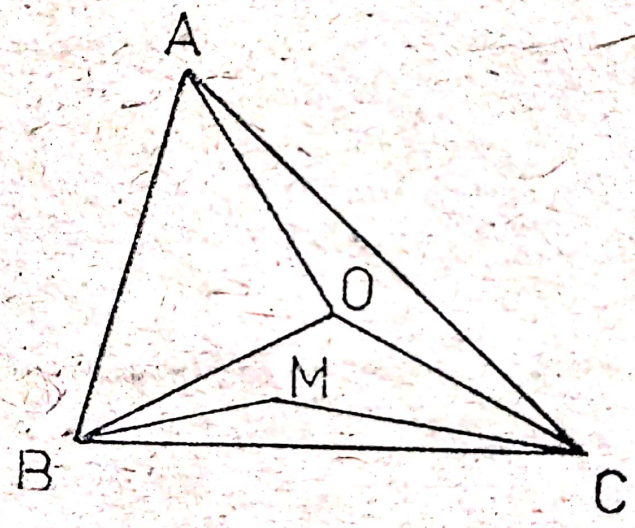
Fie $BM \cap AC = \{D\}$. Evident $MC < MD + DC \Rightarrow MC + MB < MB + MD + DC = BD + DC < AB + AD + DC = AB + AC$

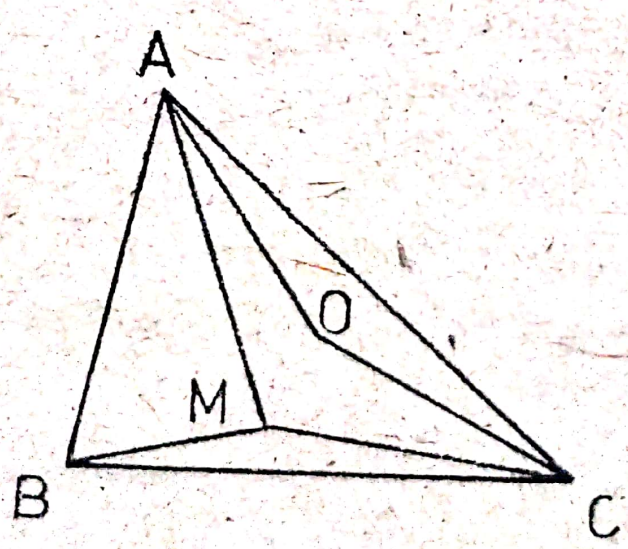
Observația 2. Dacă $x, y, z, t \in \mathbf{R}_+^*$ atunci

$$x + y \leqslant z + t \Rightarrow x \leqslant z \text{ sau } y \leqslant t$$

Într-adevăr, presupunînd prin absurd că $x > z$ și $y > t$ rezultă $x + y > z + t$ ceea ce este în contradicție cu $x + y \leqslant z + t$.

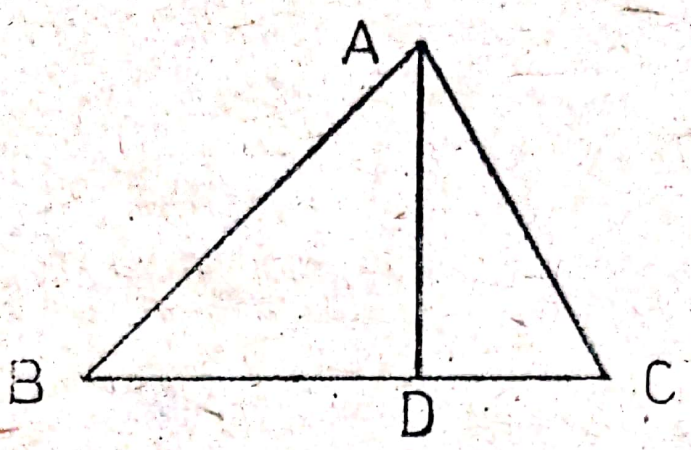
Trecem acum la rezolvarea problemei. Fie $M \in \text{Int } ABC$ și O centrul cercului circumscris, $O \in \text{Int } ABC$ deoarece triunghiul este ascuțit. Deoarece AOB, BOC, COA realizează o partiționare a suprafeței, rezultă că M aparține unuia dintre triunghiurile ABO, BOC, COA sau pe laturi. Alegem $M \in \text{Int } BOC$ și din obs. 1 avem $BM + MC \leqslant BO + OC = R + R$ și din obs. 2 $\Rightarrow BM \leqslant R$ sau $NC \leqslant R$. Considerăm acum triunghiurile AMB, BMC, CMA care realizează o partiționare a triunghiului ABC și deci O aparține unuia dintre ele, fie acesta AMC. Avem $R + R = OA + OC \leqslant AM + MC$ și din obs. 2 rezultă $R \leqslant AM$ sau $R \leqslant MC$.





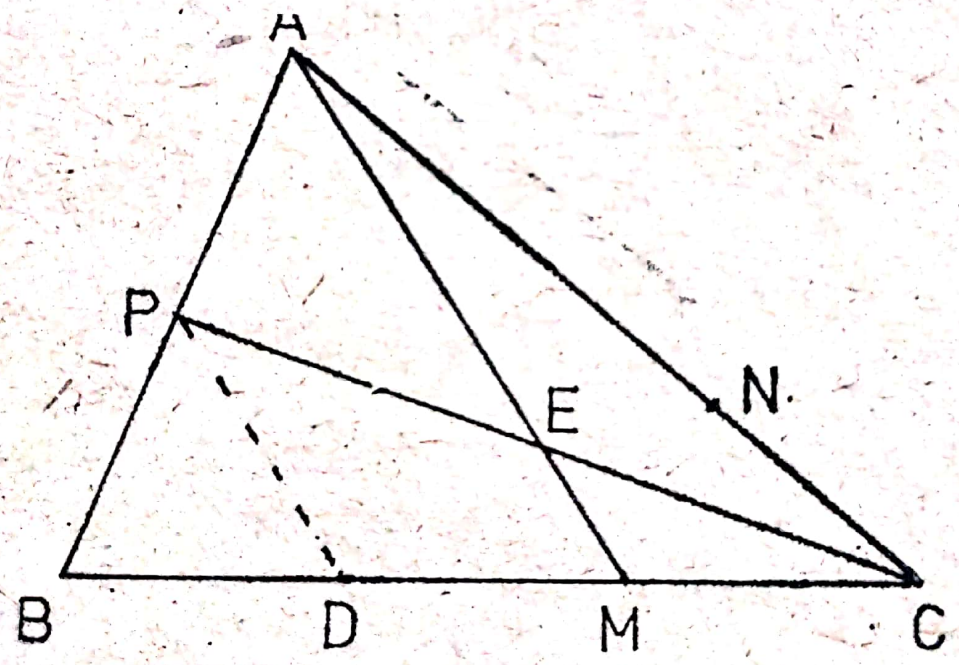
Scanned with OKEN Scanner

P 3.



În triunghiul $ADC \Rightarrow \sin 30° = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DC}{4} \Rightarrow DC = 2$, (1).
Tot în triunghiul $ADC \Rightarrow AD^2 = AC^2 - DC^2 \Rightarrow AD = 2\sqrt{3}$, (2).
În triunghiul $ABD \Rightarrow BD^2 = AB^2 - AD^2 = 13$, (3). Din (1) și (3) $\Rightarrow BC = 2 + \sqrt{13}$.

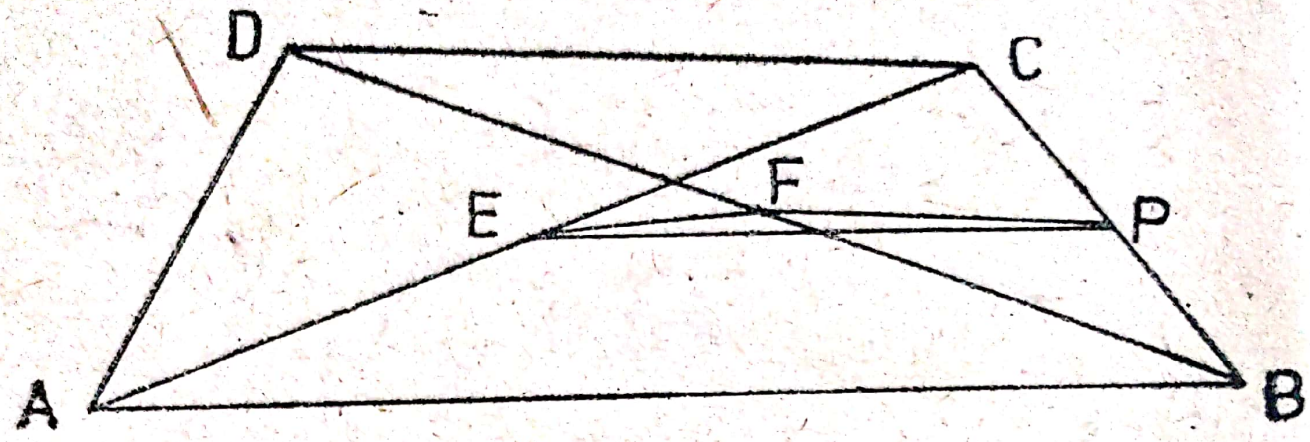
P 4.



Fie CP mediana din C. Fie $D \in (BC)$ astfel încît $BD = DM = MC$ și E mijlocul lui CP. Vom arăta că A, E, M sînt coliniare. În triunghiul $ABM \Rightarrow PD$ este linie mijlocie $\Rightarrow PD \parallel AM$. În triunghiul $CPD \Rightarrow EM$ este linie mijlocie $\Rightarrow EM \parallel PD$. Din unicitatea paralelei prin M la PD rezultă că dreptele AM și EM coincid și deci A, E, M sînt coliniare. Analog B, E, N sînt coliniare și deci AM și BN sînt concurente pe mediana CP, în mijlocul ei.

Scanned with OKEN Scanner

P 5.

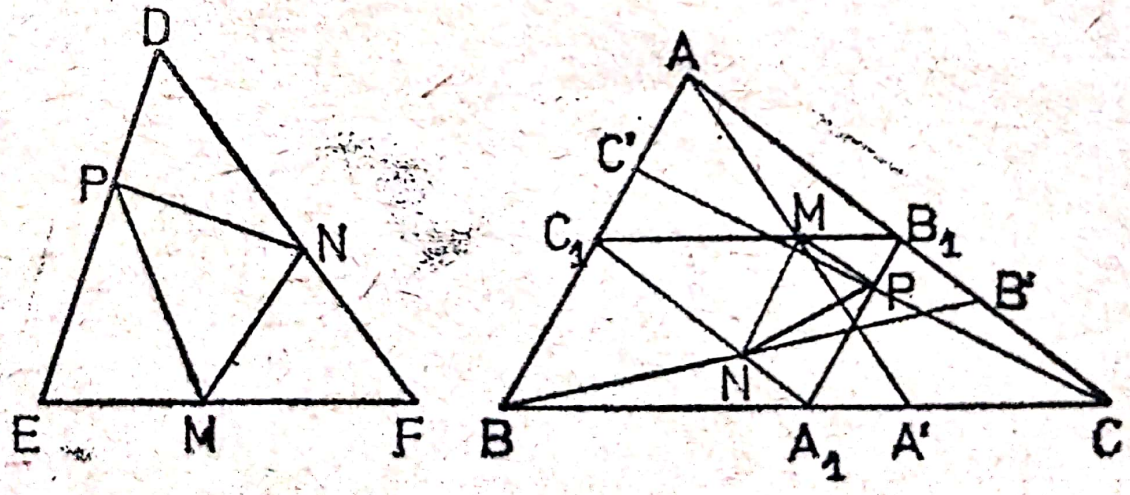


Fie E și F mijloacele diagonalelor AC și BD. Aplicăm teorema lui Euler în patrulaterul $ABCD$ și avem:

$$AC^2 + BD^2 + 4EF^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

și, ținînd seama de condiția din ipoteză, obținem $4 \cdot EF^2 = AB^2 + CD^2 - 2 \cdot AB \cdot CD \Rightarrow (2EF)^2 = (AB - CD)^2 \Rightarrow 2EF = |AB - CD|$. Fie P mijlocul lui BC. În $\Delta\, BCD$, FP este linie mijlocie $\Rightarrow FP = CD/2$. În $\Delta\, ABC$, EP este linie mijlocie și deci $EP = AB/2$. Deci $EP - FP = \frac{1}{2}|AB - CD| = EF \Rightarrow \Delta\, EFP$ este degenerat adică, E, F, P sînt coliniare. Din $FP \parallel CD$ și $EP \parallel AB$ și E, F, P coliniare rezultă $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ trapez. Dacă $EF = 0 \Rightarrow$ mijloacele diagonalelor coincid $\Rightarrow ABCD$ paralelogram.

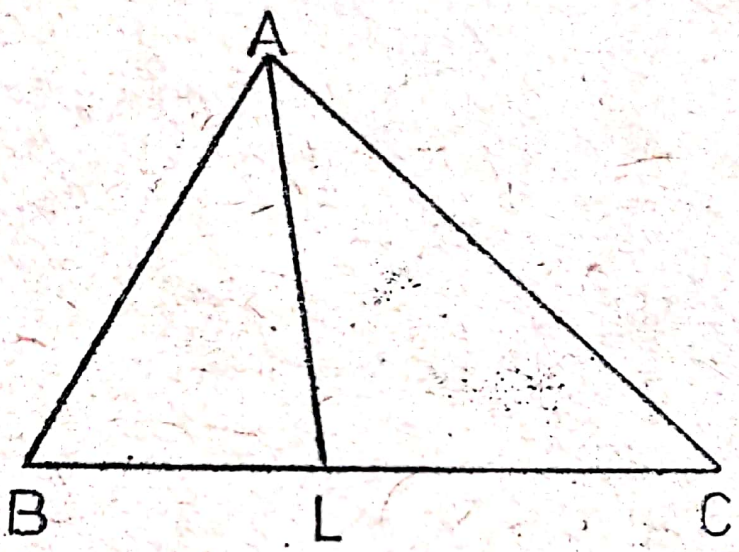
P 6.



Observație. Dacă DEF este un triunghi oarecare și M, N, P sînt puncte oarecare pe laturile lui atunci $Per\, MNP \leqslant Per\, DEF$.

Într-adevăr avem evident $MN \leqslant MF + NF$, $NP \leqslant ND + PD$ și $PM \leqslant PE + ME$ și prin adunare avem $Per\ MNP \leqslant Per\ DEF$. Trecem la rezolvarea problemei. Observăm că mijloacele cevienelor sînt respectiv pe liniile mijlocii și $Per\ MNP \leqslant Per\ A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}\ Per\ KBC$.

P 7.



Aplicăm teorema lui Stewart și avem:

$$AB^2 \cdot LC - AL^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BL = BL \cdot LC \cdot BC$$

Împărțind această relație prin BC avem

$$\frac{AB^2 \cdot LC}{BC} - AL^2 + \frac{AC^2 \cdot BL}{BC} = BL \cdot LC,\ (1).$$

Din teorema bisectoarei $\Rightarrow BL \cdot AC = AB \cdot LC$ și din (1) obținem:

$$\frac{AB \cdot AB \cdot LC}{BC} - AL^2 + \frac{AC \cdot AC \cdot BL}{BC} = BL \cdot LC \Rightarrow \frac{AB \cdot AC \cdot BL}{BC} -$$

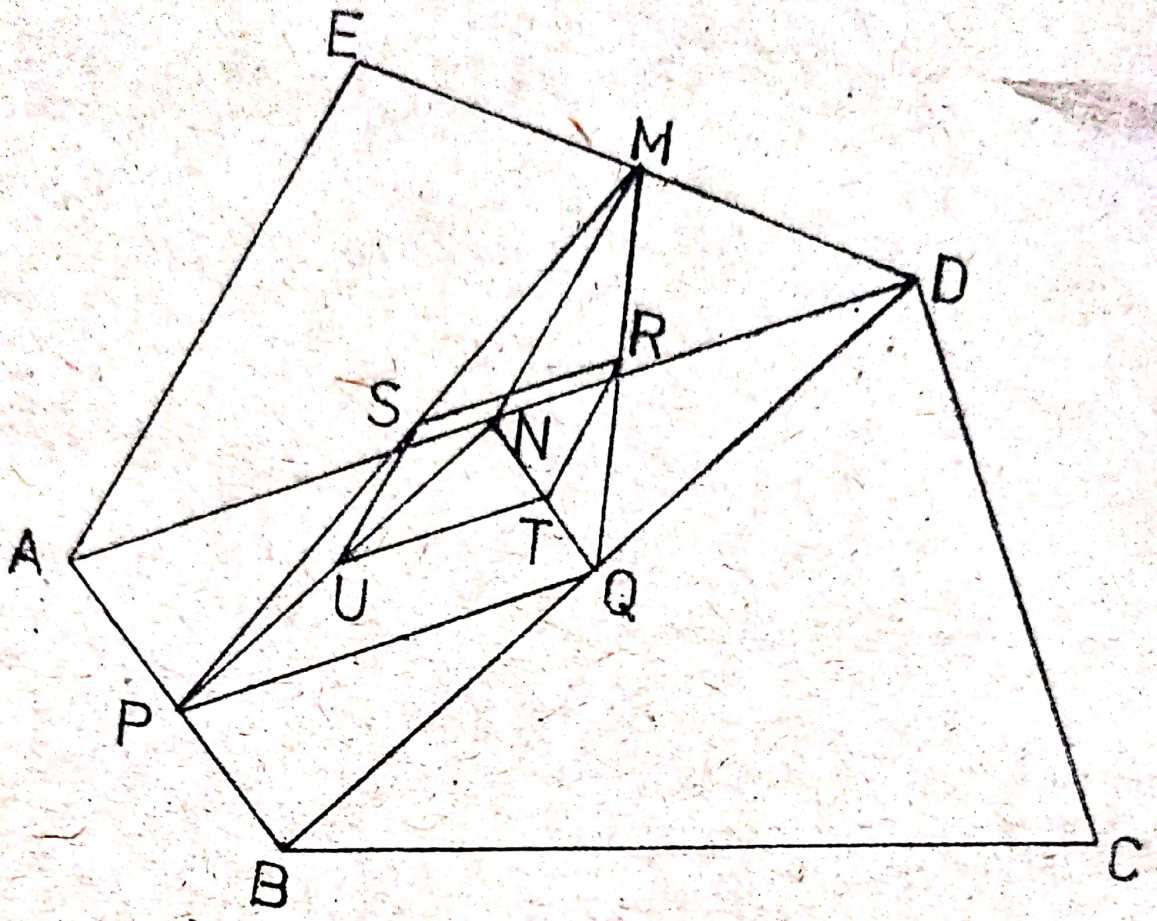
$$- AL^2 + \frac{AC \cdot AB \cdot LC}{BC} = BL \cdot LC \Rightarrow \frac{AB \cdot AC}{BC}(BL + LC) - AL^2 =$$

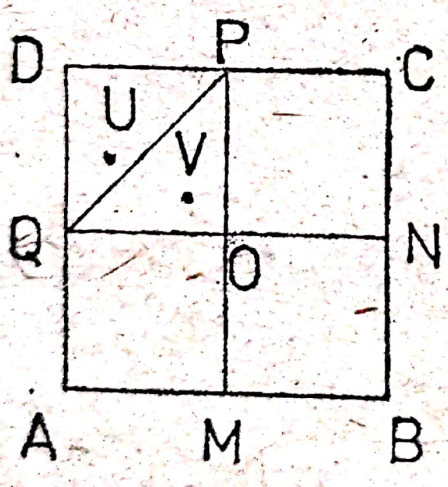
$= BL \cdot LC$ dar $BL + LC = BC$ și prin simplificare cu numitorul de la prima fracție se obține relația cerută în enunț.

P 8. În triunghiul MPQ, SR este linie mijlocie $\Rightarrow SR \parallel PQ$. În triunghiul NPQ, UT este linie mijlocie $\Rightarrow UT \parallel PQ$. În plus $SR = UT = \frac{1}{2}\ PQ$. Rămîne că segmentele SR și UT sînt paralele și egale, deci $SUTR$ este paralelogram.

Obs. Dacă $AE = AD \Rightarrow SUTR$ este romb $\Rightarrow ST \perp UR$.

Scanned with OKEN Scanner





P 9. Considerăm M, N, P, respectiv, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv, AD și fie $MP \cap NQ = \{0\}$. Pătratul s-a împărțit în 4 pătrate. Distribuim cele 5 puncte în pătrat și deci cel puțin două sînt într-un pătrat mic sau pe laturile lui. Alegem U, V în pătratul $QOPD$. Rezultatul problemei **P 13** arată că:

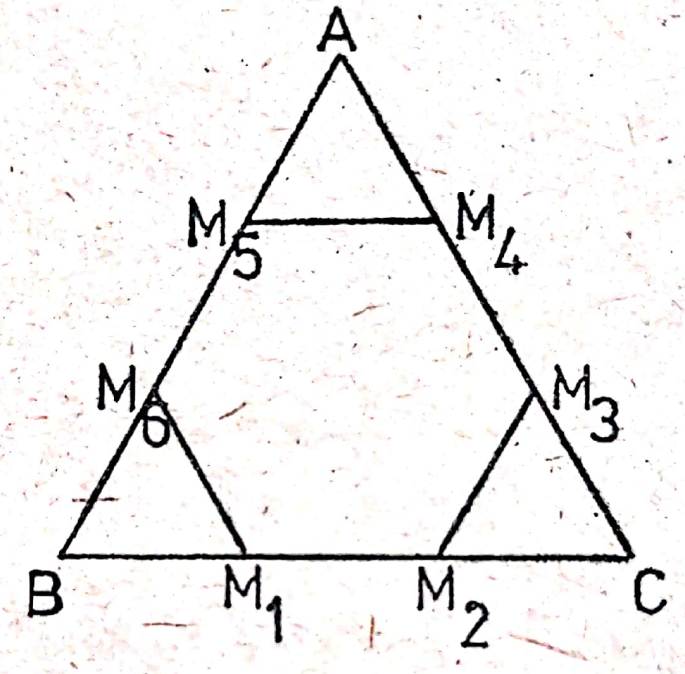
$$UV \leqslant OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

P 10. Fie a latura triunghiului. Reamintim că un poligon este regulat dacă are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente. Din

$BM_1 = BM_6 = \frac{a}{3}$ și $\widehat{M_1BM_6} = 60° \Rightarrow M_1HM_6$ este echilateral.

Deci $M_1M_6 = \frac{a}{3}$ și analog $M_2M_3 = M_4M_5 = \frac{a}{3}$. Cum evident

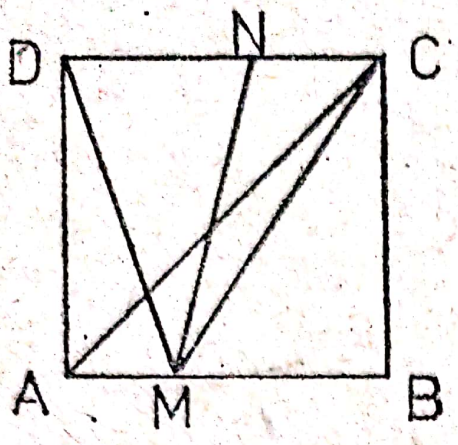
$M_1M_2 = M_3M_4 = M_5M_6 = \frac{a}{3}$. $\Rightarrow$ laturile hexagonului $M_1M_2M_3$ $M_4M_5M_6$ sînt congruente. Unghiul $\widehat{M_6M_1M_2}$ este exterior triunghiului echilateral $BM_1M_6 \Rightarrow \widehat{M_6M_1M_2} = 120°$ și analog pentru celelalte unghiuri.
Rămîne că poligonul este un hexagon regulat.



P 11. Fie ABC triunghiul în care înălțimea AI și mediana AM sînt astfel încît $\widehat{BAI} \equiv \widehat{IAM} \equiv \widehat{MAC}$. În triunghiul BAM dreapta AI este bisectoarea lui A și în același timp înălțime, căci AI este perpendiculară pe BC. Rezultă că triunghiul acesta este isoscel și deci $BM = MA$. Deoarece M este piciorul medianei avem și $BM = MC$. Rezultă că cercul descris din M ca centru cu raza MB trece prin A și prin C. Unghiul $\widehat{BAC}$ fiind inscriptibil într-un semicerc este drept. Deci $\widehat{BAE} = \frac{1}{3}\,90° = 30°$ și cum ABC este complementul lui $\widehat{BAI}$, se vede că unghiul B al triunghiului căutat este de 60°. Deci răspund la chestiune triunghiurile dreptunghice care sînt jumătăți ale unui triunghi echilateral.

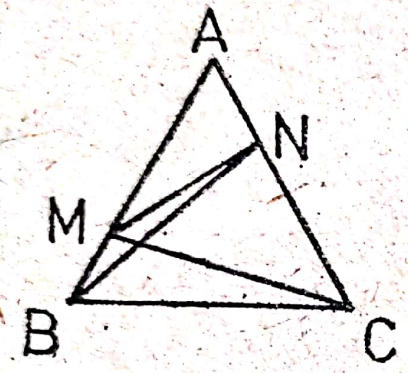
P 12. Fie $M \in (BC)$. Atunci unul din unghiurile $\widehat{AMB}$ sau $\widehat{AMC}$ are măsura mai mare sau egală cu 90°. Dacă $\widehat{AMB}$ este acesta atunci în triunghiul AMB, $AB > AM$. Dacă AMC este acesta atunci $AC > AM$.

Scanned with OKEN Scanner



P 13. În triunghiul CMD, din problema anterioară, $MN < CM$ sau $MN < MD$.

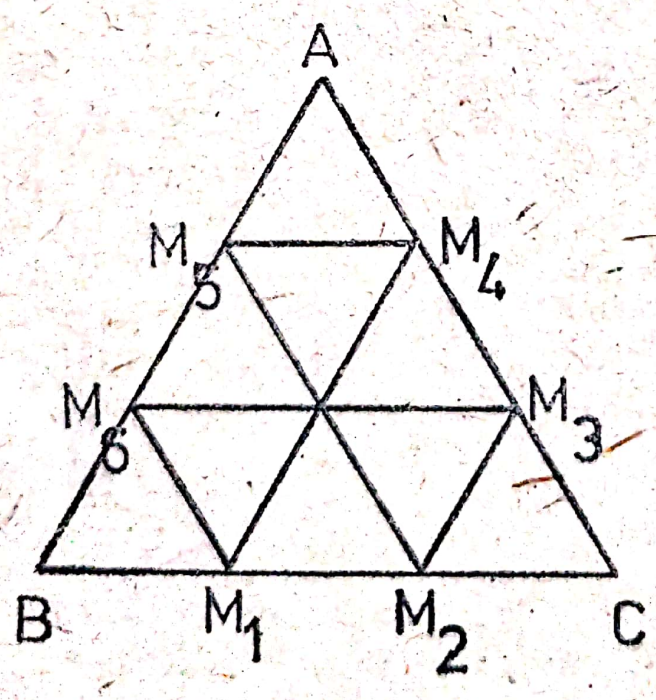
Alegem $MN < MC$, (1). În triunghiul AMC unghiul $\overset{\frown}{AMC}$ este obtuz, deoarece este exterior triunghiului dreptunghic MBC, și, deci $MC < AC$(2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MN < AC$.

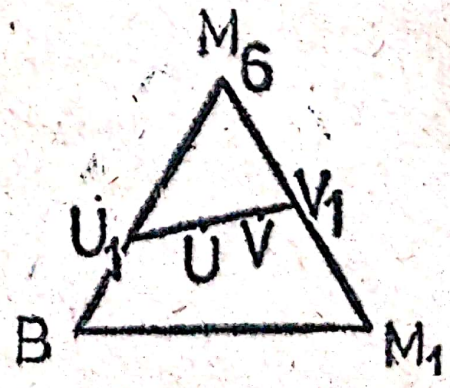


P 14. În triunghiul MCN unghiul MNC este mai mare decît 60° (fiind exterior triunghiului AMN) și unghiul NCM este mai mic decît 60° (MC fiind interioară unghiului $\overset{\frown}{ACB}$). Deoarece într-un triunghi la latura mai mare se opune unghiul mai mare și reciproc rezultă că $MN < MC$

În mod analog rezultă $MN < BN$.

P 15. Considerăm împărțirea triunghiului în 9 triunghiuri astfel: din exercițiul P 10, $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ este hexagon regulat și considerăm împărțirea acestuia în 6 triunghiuri echilaterale congruente. Din BM_1M_6 CM_2M_3, AM_4M_5 triunghiuri echilaterale de latură 1/3, rezultă că





s-au obținut 9 triunghiuri echilaterale congruente. Luînd 10 puncte la întîmplare rezultă că într-unul dintre triunghiuri există 2 puncte. Alegem BM_1M_6 și fie U, V cele 2 puncte. Considerăm intersecțiile dreptei UV cu laturile triunghiului, fie acestea U_1, V_1. Evident $UV \leqslant U_1V_1$ și din problema anterioară avem $BV_1 \leqslant BM_6$ sau $BV_1 \leqslant BM_1$. În ambele cazuri $BV_1 \leqslant \frac{1}{3}$. Deci $UV \leqslant U_1V_1 \leqslant BV_1 \leqslant \frac{1}{3}$.

P 16. Avem $BM + MC = a$ și $BM = k \cdot MC$ de unde $MC = \frac{a}{k+1}$ și $BM = \frac{ak}{k+1}$ unde $a = BC$ și în continuare $b = AC$ și $c = AB$. Aplicăm relația lui Stewart: $AB^2MC - AM^2BC + AC^2BM = BM \cdot MC \cdot BC$. Înlocuind avem:

$$c^2 \frac{a}{k+1} - AM^2 a + b^2 \frac{ak}{k+1} = \frac{ak}{k+1} \frac{a}{k+1} \cdot a$$

După calcule se ajunge la

$$AM^2 = \frac{k(b^2 + c^2 - a^2) + k^2b^2 + c^2}{(k+1)^2}$$

P 17. AM mediană. Luăm $k = 1$ și deci $BM = MC$ adică AM este mediană. Obținem $AM^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + b^2 + c^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

AM bisectoare. Din teorema bisectoarei $\frac{BM}{c} = \frac{MC}{b} \Rightarrow BM = \frac{c}{b} MC$ și luăm $k = c/b$. După calcule obținem

$$AM^2 = \frac{cb^3 + bc^3 - cba^2 + 2c^2b^2}{(b+c)^2}$$

P 18. „$\Rightarrow$" Presupunem că $AM \perp BC$ și arătăm că $AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2$. În triunghiul dreptunghic $ABM \Rightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2$ și în ACM avem $AM^2 = AC^2 - CM^2$ și deci $AM^2 = AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2$.

„$\Leftarrow$" Presupunem că $AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2$ și arătăm că $AM \perp BC$. Presupunem prin absurd că AM nu este perpendiculară pe BC și fie $AN \perp BC$. Deoarece $N \neq M$ avem $N \in (BM)$ sau $N \in (MC)$. Alegem $N \in (BM) \Rightarrow BN < BM$ și $NC > MC$, (1). În triunghiurile dreptunghice ABN și ACN avem $AB^2 - BN^2 = AN^2 = AC^2 - CN^2 \Rightarrow AB^2 - AC^2 = BN^2 - CN^2$, (2). Din $AB^2 - BM^2 = AC^2 - CM^2 \Rightarrow AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$, (3). Din (2) și (3) avem $BN^2 - CN^2 = BM^2 - CM^2 \Rightarrow (BN - CN)(BN + CN) = (BM - CM)(BM + CM) \Rightarrow (BN - CN)BC = (BM - CM)BC \Rightarrow BN - CN = BM - CM \Rightarrow BN - BM = CN - CM$, (4). Din

$BN < BM \Rightarrow BN - BM < 0$ și din (4) $CN - CM < 0 \Rightarrow CN < CM$ ceea ce este în contradicție cu (1).

P 19. „$\Rightarrow$" Din problema anterioară $AB^2 - BM^2 = AC^2 - MC^2$, (*). Din $BM = k \cdot MC$ și $BM + MC = BC$ rezultă $MC = BC/(1 + k)$ $BM = \dfrac{kBC}{k+1}$ și din (*) avem $AB^2 - \dfrac{k^2BC^2}{(1+k)^2} = AC^2 - \dfrac{BC^2}{(1+k)^2}$ și după calcule elementare se obține $k = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{AB^2 - AC^2 - BC^2}$.

„$\Leftarrow$" În baza problemei anterioare este suficient să demonstrăm că $AB^2 - MB^2 = AC^2 - MC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = MB^2 - MC^2$. Avem

$$MB^2 - MC^2 = \frac{k^2BC^2}{(1+k)^2} - \frac{BC^2}{(1+k)^2} = \frac{BC^2(k-1)}{k+1}$$

Înlocuind în această ultimă relație k din enunț, după calcule rezultă $MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$ și deci $AM \perp BC$.

Pentru calculul lui AM avem $AM^2 = AC^2 - CM^2 = AC^2 - \dfrac{BC^2}{(1+k)^2}$

Înlocuind acum valoarea lui k din enunț după calcule obținem

$$AM^2 = AC^2 - \frac{(AB^2 - AC^2 - BC^2)^2}{4BC^2}$$

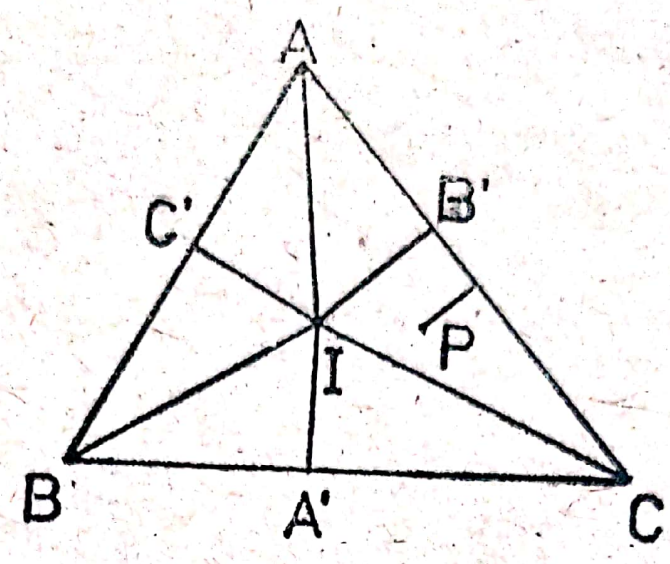
P 20. Fie r_1, r_2, r razele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, ACD, respectiv, ABC, p_1, p_2, p semiperimetrul triunghiului ABD, ACD, respectiv, ABC și $S_1 = S(ABD)$, $S_2 = S(ACD)$, $S = S(ABC)$, Se știe că $S_1 = p_1r_1$, $S_2 = p_2r_2$, $S = pr$. Rezultă că: $r_1 + r_2 + r = \dfrac{S_1}{p_1} + \dfrac{S_2}{p_2} + \dfrac{S}{p} = \dfrac{BD\ AD}{2p_1} + \dfrac{CD\ AD}{2p_2} + \dfrac{BC\ AD}{2p} =$

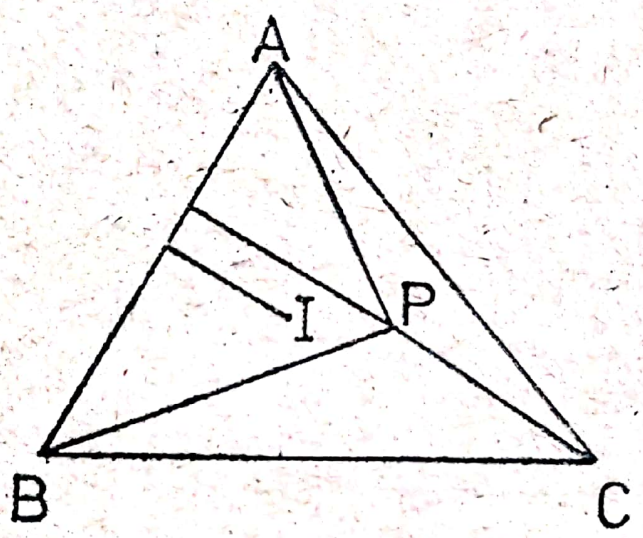
$= AD\left(\dfrac{BD}{2p_1} + \dfrac{CD}{2p_2} + \dfrac{BC}{2p}\right)$, (1). Avem $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ de unde $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{BD + AB + AD}{AB + BC + AC} = \dfrac{2p_1}{2p} = \dfrac{p_1}{p} \Rightarrow \dfrac{BD}{p_1} = \dfrac{AB}{p}$ și analog se obține $\dfrac{CD}{p_2} = \dfrac{AC}{p}$. Din (1) avem $r_1 + r_2 + r = AD \cdot \left(\dfrac{AB}{2p} + \dfrac{AC}{2p} + \dfrac{BC}{2p}\right) = AD\dfrac{AB + AC + BC}{2p} = AD\dfrac{2p}{2p} = AD.$

P 21. *Observație.* Fie ABC un triunghi oarecare și h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor corespunzătoare laturilor BC, CA, AB. Dacă $P \in Int\ ABC$ atunci $d(P, BC) < h_a$, $d(P, AC) < h_b$, $d(P, AB) < h_c$. În particular, dacă ABC este triunghi dreptunghic atunci distanța de la un punct interior la o catetă este mai mică decît cealaltă catetă.

Revenim la soluția problemei.

Scanned with OKEN Scanner





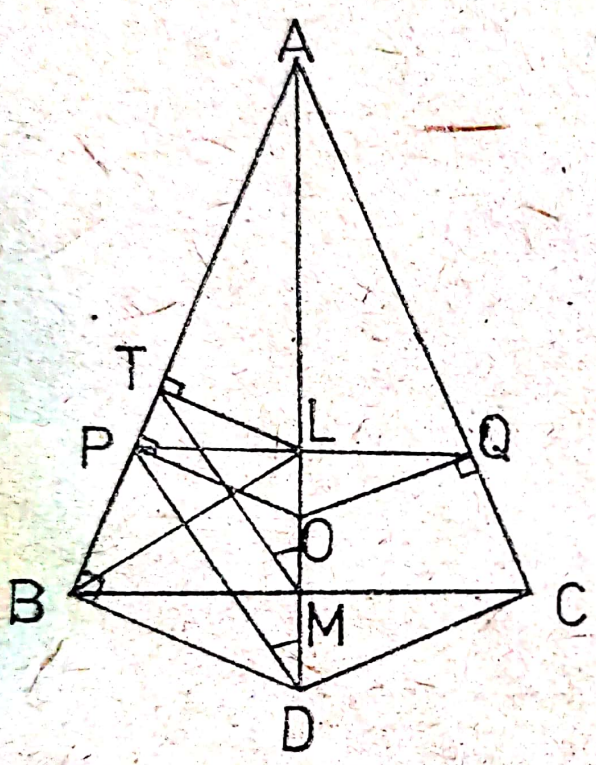
Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și A', B', C' proiecțiile lui pe laturi. Triunghiul se împarte în 6 triunghiuri dreptunghice: BIA', CIA', CIB', AIB', AIC', BIC'. Deoarece ele acoperă triunghiul ABC și sînt disjuncte rezultă că P aparține unuia dintre ele (în interior sau pe laturi). Alegem $P \in Int\, CIB'$. Atunci $d(P,AC) \leqslant IB' = r$.

Considerăm acum acoperirea triunghiului ABC cu triunghiurile APB, BPC, CPA și presupunem că I este în interiorul triunghiului APB. Cum înălțimea acestui triunghi este $d(P, AB)$ și I este interior, din observație rezultă că $d(I, AB) \leqslant d(P, AB)$ adică $r \leqslant d(P, AB)$.

P 22. Fie $P \in AB$ și $PP_1 \parallel BC$, $P_1 \in AC$, $PP_2 \parallel AC$, $P_2 \in BC$. Notăm S_1 aria triunghiului APP_1, S_2 aria triunghiului BPP_2 și cu S aria triunghiului ABC. Din asemănarea triunghiurilor APP_1 și ABC avem $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2$, iar din asemănarea triunghiurilor BPP_2 și ABC avem $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{BP}{AB}\right)^2$. Deci $\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} = \frac{AP^2 + BP^2}{AB^2}$. Mai tre-

buie demonstrat că: $\frac{AP^2 + BP^2}{AB^2} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2AP^2 + 2BP^2 \geqslant (AP + BP)^2 \Leftrightarrow 2AP^2 + 2BP^2 \geqslant AP^2 + BP^2 + 2AP \cdot BP \Leftrightarrow AP^2 + BP^2 - 2AP \cdot BP \geqslant 0 \Leftrightarrow (AP - BP)^2 \geqslant 0$ ceea ce este evident.

Obs. $\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AP = BP \Leftrightarrow 2(S_1 + S_2) = S \Leftrightarrow P$ este la mijlocul lui AB.



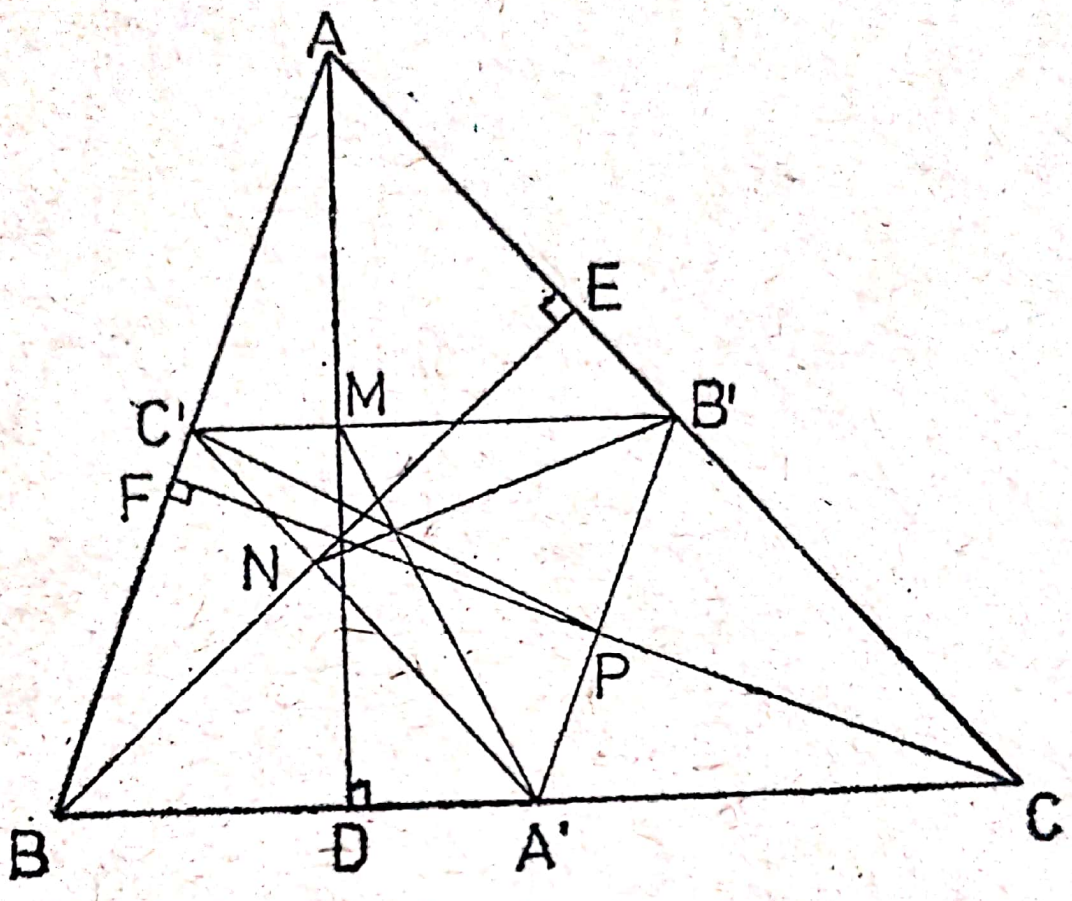
P 23. Considerăm: O centrul cercului interior tangent dreptelor AB și AC în P și Q; D punctul de tangență al celor două cercuri; L mijlocul lui PQ; M mijlocul lui BC; $LT \perp AB$.
Trebuie demonstrat că $LT = LM$. Avem $OP = OD = OQ$ ca raze ale cercului interior. În patrulaterul inscriptibil $LTBM$ avem $\widehat{LBT} \equiv \widehat{TML}$, (1). În patrulaterul inscriptibil $LPBD$ avem $\widehat{LBP} \equiv \widehat{PDL}$, (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow \widehat{TML} \equiv \widehat{PDM} \Rightarrow PD \parallel TM$. Cum $LT \parallel OP$ și $LM \parallel OD$ rezultă că triunghiurile LTM și OPD au laturile paralele și deci sînt asemenea. Deoarece triunghiul OPD este isoscel rezultă că triunghiul LTM este isoscel și deci $LT = LM$ *q.e.d.*

P 24. Deoarece mijlocul oricărei ceviene aparține liniei mijlocii corespunzătoare rezultă $M \in (B'C')$, $N \in (A'C')$, $P \in (A'B')$ și deci $A'M$, $B'N$, $C'P$ devin ceviene în triunghiul $A'B'C'$.
Vom verifica relația lui Ceva.

Evident $\triangle AC'M \sim \triangle ABD$ și $\triangle AB'M \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{C'M}{BD} = \frac{B'M}{DC} \Rightarrow \frac{C'M}{B'M} = \frac{BD}{CD}$ și analog $\frac{B'P}{A'P} = \frac{AF}{BF}$ și $\frac{A'N}{C'N} = \frac{CE}{AE}$.

Avem $\frac{C'M}{B'M} \cdot \frac{A'N}{C'N} \cdot \frac{B'P}{A'P} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF}$, (1)

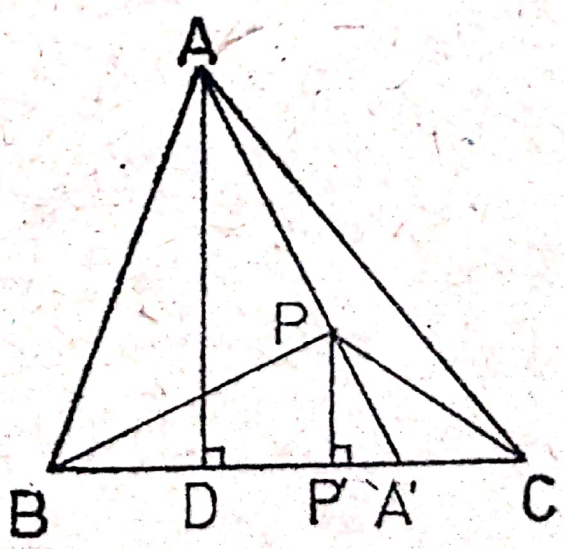
Scanned with OKEN Scanner



și deoarece înălțimile unui triunghi sînt concurente rezultă $\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$ și din (1) $\Rightarrow \frac{C'M}{B'M} \frac{A'N}{C'N} \frac{B'P}{A'P} = 1$ și deci $A'M$, $B'N$, $C'P$ sînt concurente.

P 25. Fie $AD \perp BC$ și $PP' \perp BC$. Avem $\triangle A'PP' \sim \triangle A'AD$ și deci

$$\frac{A'P}{AA'} = \frac{PP'}{AD} \Rightarrow \frac{PP'}{AD} = k.$$



Avem

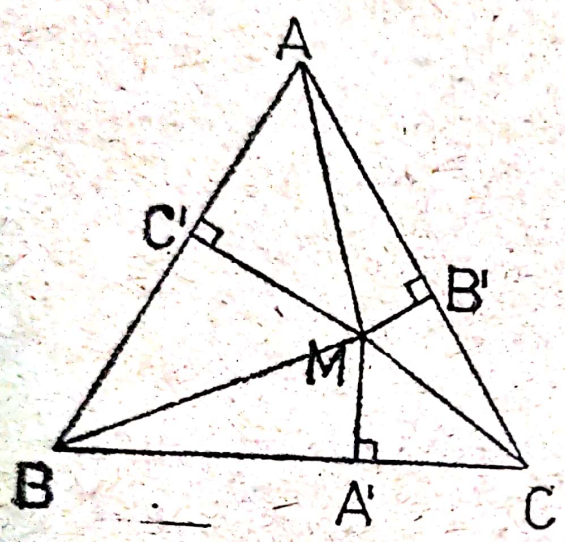
$$\frac{S(BPC)}{S(ABC)} = \frac{BC \cdot PP'}{BC \cdot AD} = \frac{PP'}{AD} = k$$

și deci

$$S(BPC) = k \cdot S(ABC)$$

Scanned with OKEN Scanner

P 26. Din problema anterioară avem: $S(BP_1C) = k_1 S(ABC)$, $S(CP_2A) = k_2 S(ABC)$ și $S(AP_3B) = k_3 S(ABC)$. Avem:
$S(BP_1C) + S(CP_2A) + S(AP_3B) = S(ABC) \Rightarrow (k_1 + k_2 + k_3)\, S(ABC) = S(ABC) \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 = 1$.

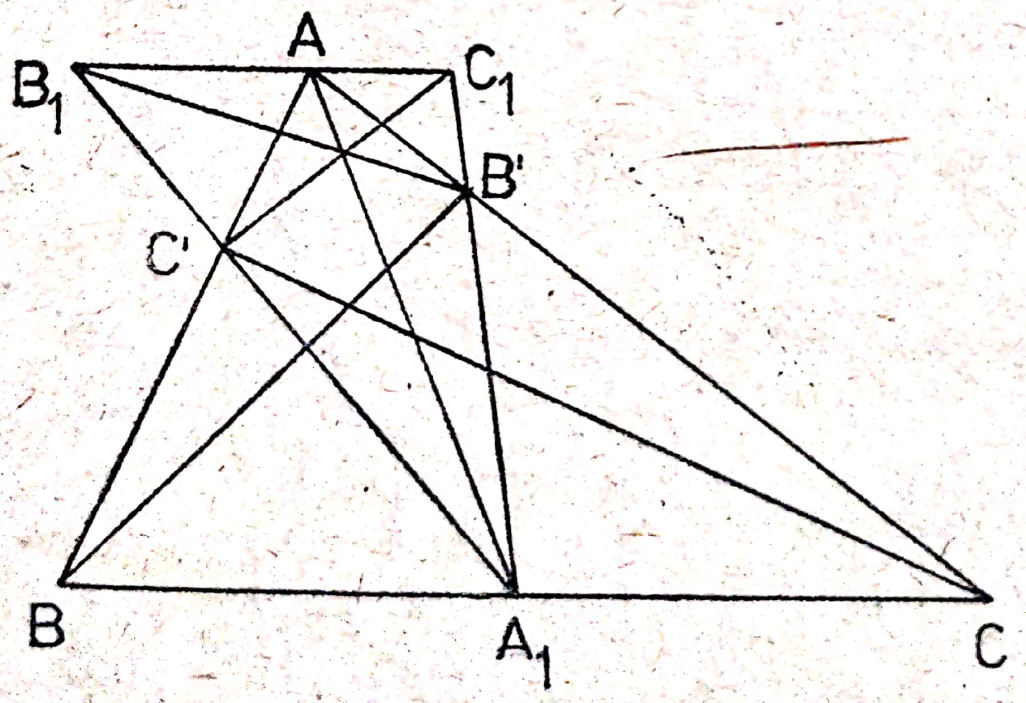


P 27. Fie a latura triunghiului echilateral. Vom folosi teorema lui Pitagora. Avem $BA'^2 = BM^2 - MA'^2$ și $CA'^2 = MC^2 - MA'^2$ de unde prin scădere $CA'^2 - BA'^2 = MC^2 - BM^2 \Rightarrow (a - BA')^2 - BA'^2 = CM^2 - BM^2 \Rightarrow a^2 - 2a\,BA' = CM^2 - BM^2$, (1).

Analog obținem
$a^2 - 2a \cdot CB' = AM^2 - CM^2$, (2) și $a^2 - 2a \cdot AC' = BM^2 - AM^2$ (3).

Din (1) + (2) + (3) obținem $3a^2 - 2a(BA' + CB' + AC') = 0$ de unde $BA' + CB' + AC' = \frac{3a}{2} \Rightarrow$ constant.

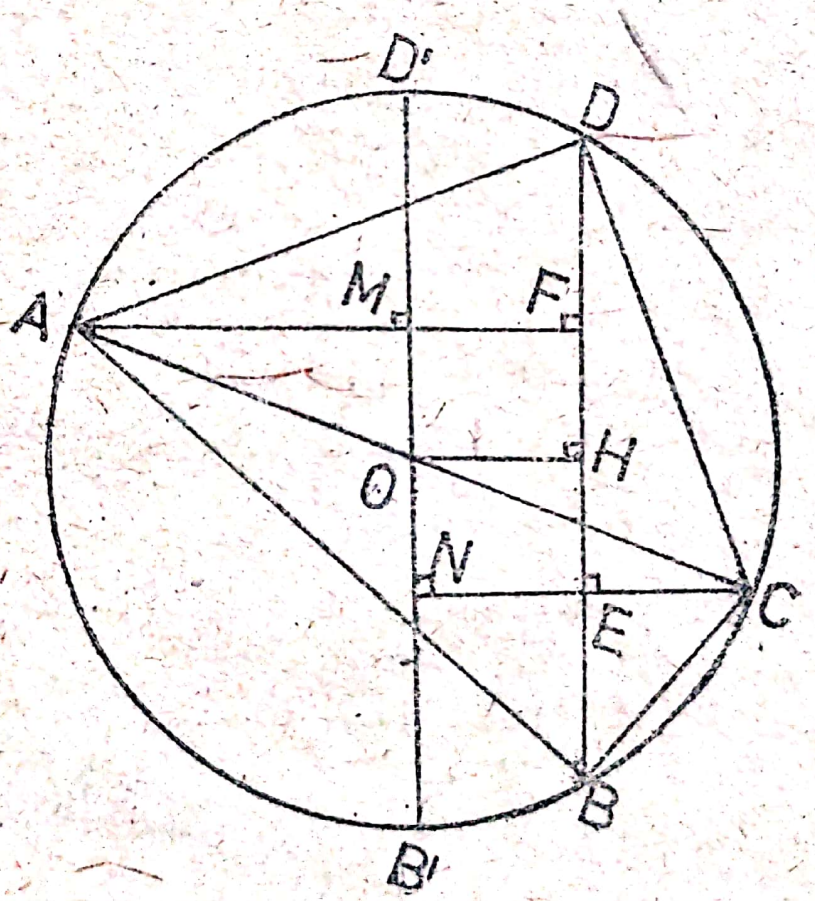
P 28. Vom folosi asemănarea triunghiurilor și reciproca teoremei Ceva.



Avem: $\triangle AB_1C' \sim \triangle C'BA_1 \Rightarrow \frac{B_1C'}{C'A_1} = \frac{AB_1}{BA_1}$ și $\triangle AB'C_1 \sim$ $\sim \triangle CB'A_1 \Rightarrow \frac{A_1C}{AC_1} = \frac{A_1B'}{C_1B'}$ și prin înmulțirea relațiilor obținute găsim $\frac{A_1C}{AC_1}\,\frac{AB_1}{BA_1} = \frac{A_1B'}{C_1B'}\,\frac{B_1C'}{C'A_1}$ și din $A_1C = BA_1 \Rightarrow \frac{A_1B'}{C_1B'}\,\frac{B_1C'}{C'A_1}$ $\frac{AC_1}{AB_1} = 1$.

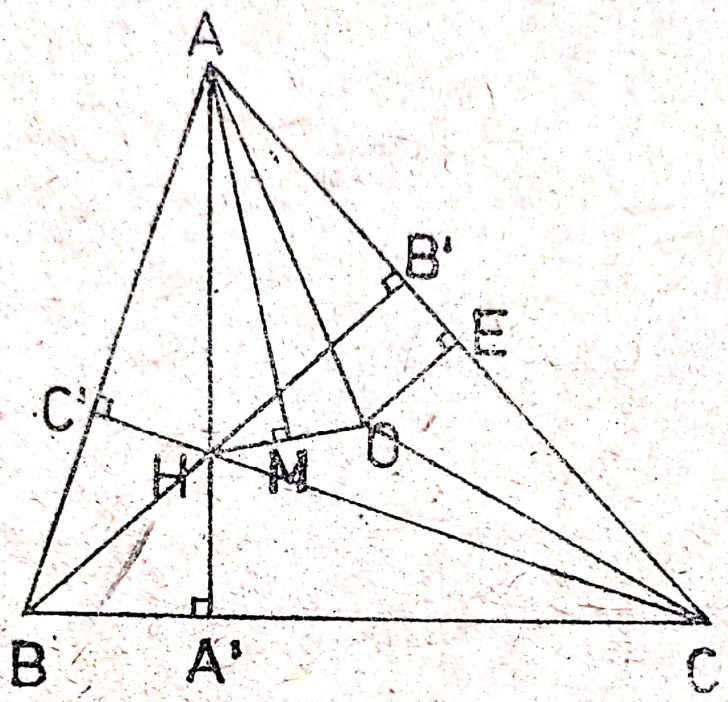
Conform reciprocei teoremei lui Ceva aplicată în triunghiul $A_1B_1C_1$ rezultă că AA_1, $C'C_1$, $B'B_1$ sînt concurente.

P 29. Deoarece unghiurile B și D sînt suplementare patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului, H mijlocul coardei BD, $B'D'$ diametrul paralel cu BD, $AF \cap B'D' = \{M\}$, $CE \cap B'D' = \{N\}$.



H fiind mijlocul coardei $BD \Rightarrow OH \perp BD$ și $HD = HB$. Din construcție $MO = HF$ și $NO = HE$. Avem $\triangle AOM \equiv \triangle CON$ și deci $MO \equiv NO$ de unde $HF \equiv HE$. Dedi $BE = BH - HE = HD - HF = DF$.

P 30. Fie A', B', C', picioarele înălțimilor, E mijlocul lui AC, AM bisectoarea lui A. Din ipoteză $AM \perp OH$, $M \in OH$.
Vom arăta că triunghiul AHO este isoscel.



Avem $m(\widehat{AOE}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{B}) \Rightarrow m(\widehat{OAE}) = 90° - m(\widehat{B})$.

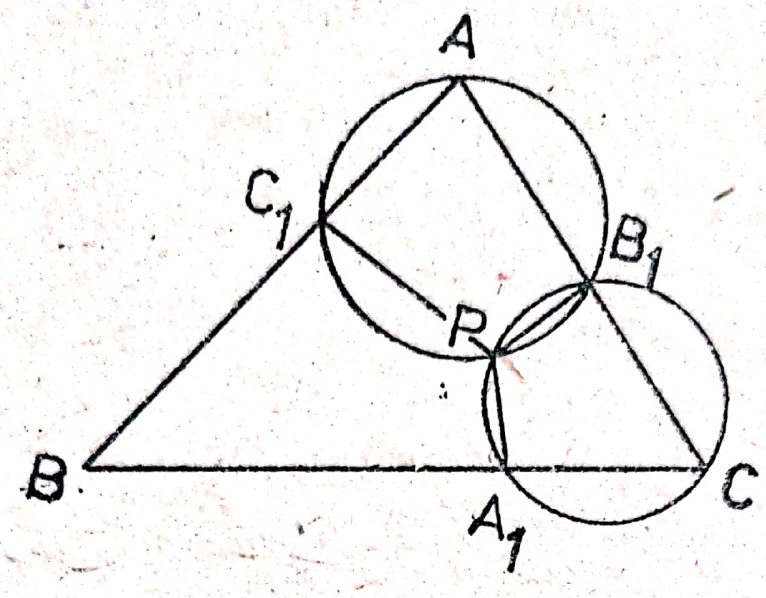
Evident $m(\widehat{BAA'}) = m(\widehat{OAE})$. Din AM bisectoare $\Rightarrow m(\widehat{HAM}) = m(\widehat{MAO})$ și deci în triunghiul HAO, AM este înălțime și bisectoare $\Rightarrow$ triunghiul HAO este isoscel, și deci $AO = AH$.

Avem $\Delta AHC' \equiv \triangle AOE$ deoarece $AH = AO$ și $\widehat{C'HA} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{AOE}$,

Deci $AC' \equiv AE \Rightarrow \cos A = \frac{AC'}{AC} = \frac{AC'}{2AE} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(A) = 60°$.

P 31. Fie P al doilea punct comun cercurilor circumscrise triunghiurilor AC_1B_1 și CA_1B_1. Vom arăta că patrulaterul BA_1PC_1 este incscriptibil.

Din AC_1PB_1 patrulater inscriptibil rezultă $m(\widehat{C_1PB_1}) = 180° - m(\widehat{A})$, (1). Din CB_1PA_1 patrulater inscriptibil rezultă că $m(\widehat{B_1PA_1}) = 180° - m(\widehat{C})$, (2). Ținînd seama de (1) și (2) avem $m(\widehat{A_1PC_1}) =$



$= 360° - m(\widehat{A_1PB_1}) - m(\widehat{B_1PC_1}) = 360° - [180° - m(\widehat{A})] - [180° - m(\widehat{C})] = m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180° - m(\widehat{B})$ și deci $\widehat{A_1PC_1}$ și $\widehat{B}$ sînt suplementare $\Rightarrow BA_1PC_1$ este patrulater inscriptibil.

P.32. Triunghiurile ACB_1 și ACB' sînt asemenea deoarece $\widehat{GAB'} \equiv \widehat{ACB_1}$ și $\widehat{AB'G} \equiv \widehat{CAB_1}$ fiind alterne interne. Avem:

$$\frac{AB_1}{GB'} = \frac{B_1C}{AG} = \frac{AC}{AB'}\,\frac{2AB'}{AB'} = 2 \Rightarrow \frac{S(AB_1C)}{S(AGB')} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(AB_1C) = 4S(AGB'), \quad (1).$$

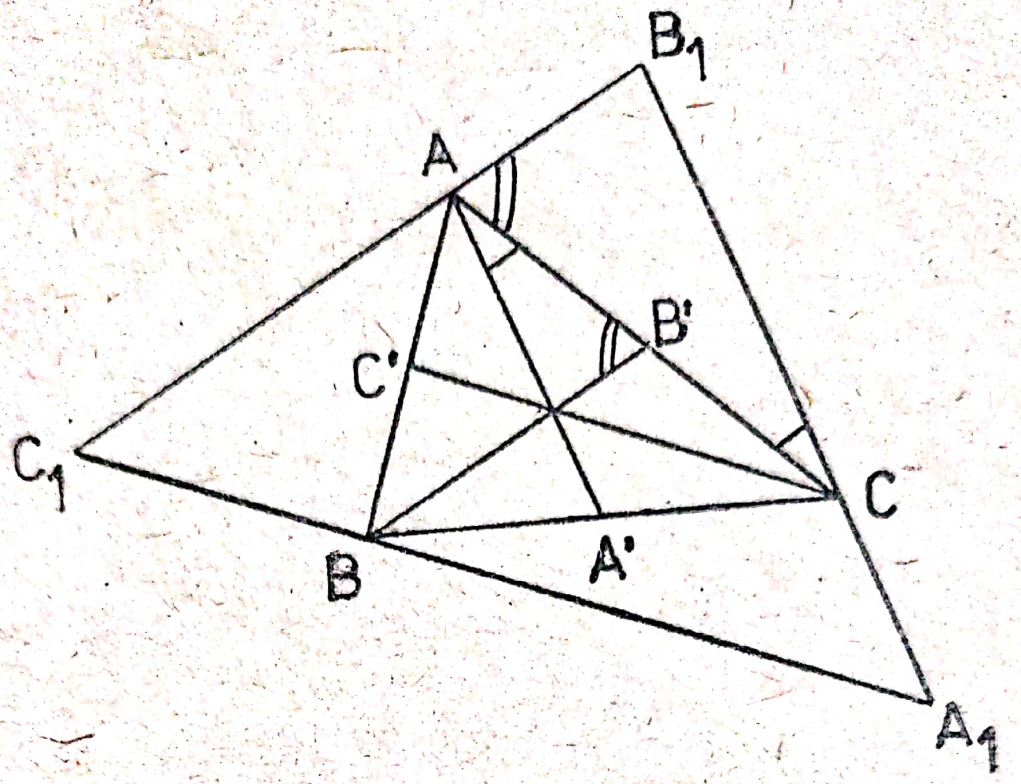
Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ABC rezultă că $S(AGC) = \frac{1}{3}S(ABC)$ și deoarece GB' este mediană în triunghiul AGC avem $S(AGB') = \frac{1}{2}S(AGC)$ și deci $S(AGB') = \frac{1}{6}S(ABC)$.

Înlocuind acum în (1) găsim $S(AB_1C) = \frac{2}{3}S(ABC)$. Analog obținem $S(AC_1B) = \frac{2}{3}S(ABC)$ și $S(BA_1C) = \frac{2}{3}S(ABC)$. Deci

$$S(A_1B_1C_1) = S(ABC) + S(AB_1C) + S(BC_1A) + S(CA_1B) =$$

$$= S(ABC)\cdot\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = 3S(ABC).$$ Deci am obținut că

$$S(A_1B_1C_1) = 3S(ABC).$$



P 33. a) Din asemănarea triunghiurilor ABD și ABC avem:

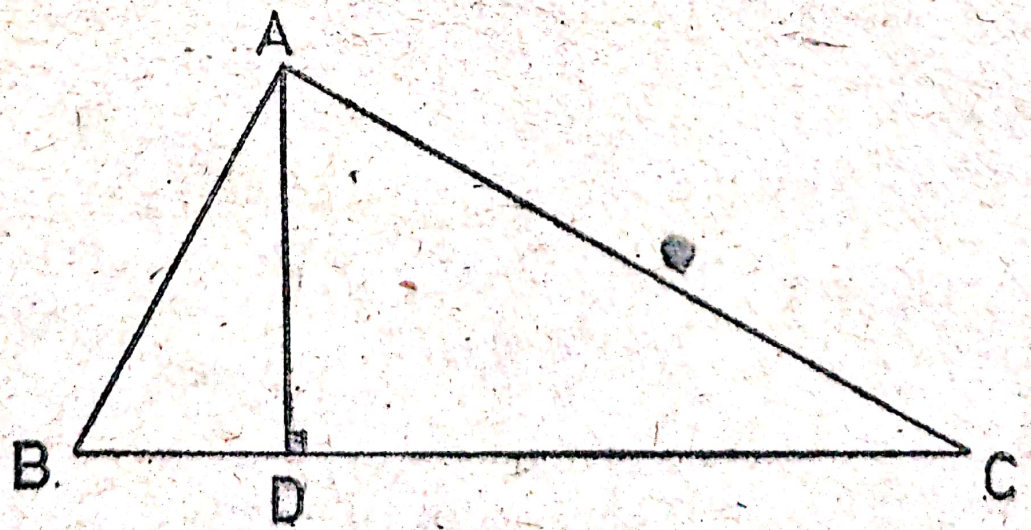
$$\frac{1}{k} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{S(ABD)}{S(ABC)} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S(ABD)}{S(ABC)} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow S(ABD) = \frac{1}{k^2} S(ABC), \qquad (1).$$

Din asemănarea triunghiurilor ACD și ABC avem:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{S(ACD)}{S(ABC)} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2 - AB^2}{BC^2} =$$

$$= 1 - \frac{AB^2}{BC^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$



Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$S(ACD) = \frac{k^2 - 1}{k^2} S(ABC), \qquad (2).$$

Din (1) și (2) obținem

$$\frac{S(ABD)}{S(ACD)} = \frac{1}{k^2 - 1}.$$

b) Ținînd seama de șirurile de rapoarte egale de la a) avem

$$\text{Per}\ (ABD) = AB + AD + BD = \frac{BC}{k} + \frac{AC}{k} + \frac{AB}{k} =$$

$$= \frac{1}{k} \text{ Per } (ABC) \text{ și deci}$$

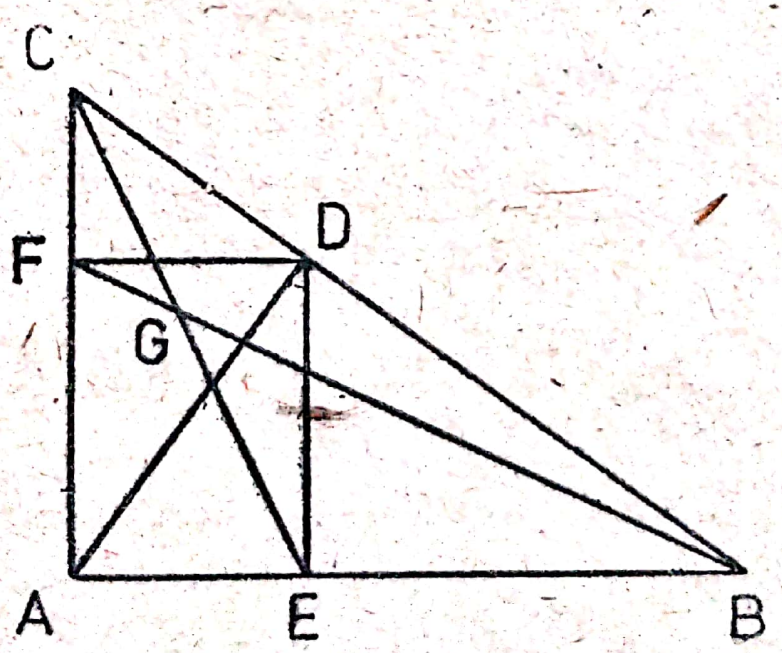
$$\frac{\text{Per } (ABD)}{\text{Per } (ABC)} = \frac{1}{k}.$$

P 34 Deoarece $m(\widehat{BAN}) = 90° \Rightarrow BN$ este diametru și deoarece $m(\widehat{MAC}) = 90°$ rezultă că și MC este diametru. Deci în patrulaterul $MBCN$ diagonalele se înjumătățesc și sînt egale. Rămîne că $MBCN$ este dreptunghi $\Rightarrow MN \parallel BC$.

P 35. Avem succesiv $S(BGC) = S(CED) + S(BDE) - S(BEG) =$

$$= \frac{1}{2} DE \cdot d(C, DE) + \frac{1}{2} DE \cdot BE - S(BEG) = \frac{1}{2} DE \cdot AE +$$

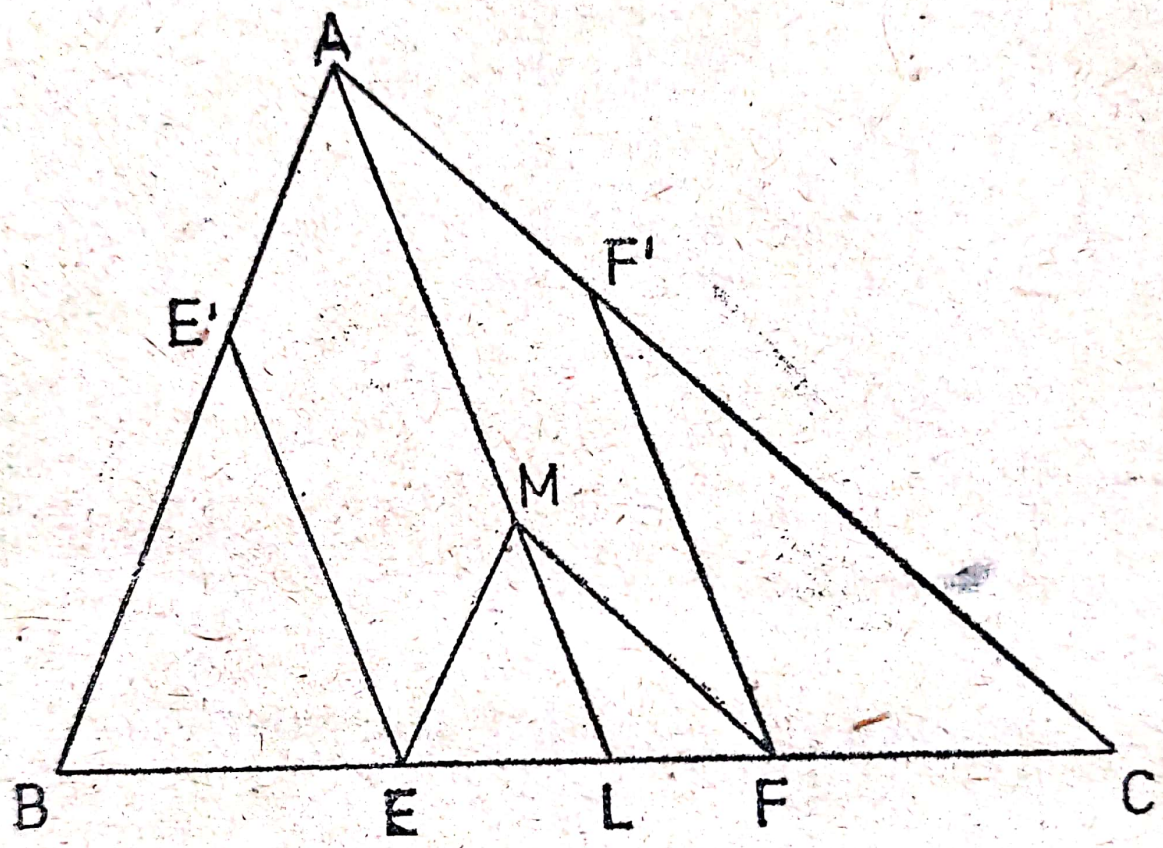
$$+ \frac{1}{2} DE \cdot BE - S(BEG) = \frac{1}{2} DE\,(AE + BE) - S(BEG) =$$



$= \frac{1}{2} DE \cdot AB - S(BEG) = \frac{1}{2} AF \cdot AB - S(BEG) = S(ABF) -$
$- S(BEG) = S(AEGF)$. Deci

$$S(BGC) = S(AEGF)$$

P 36. Fie $AM \cap BC = \{L\}$ și notăm $AM/AL = x$. Din $MF \parallel AC$ și $FF' \parallel AM$ rezultă că $MFF'A$ este paralelogram și analog, $EMAE'$ este tot paralelogram.



Din asemănarea triunghiurilor CFF' și CAL rezultă:

$$\frac{S_3}{S(CAL)} = \left(\frac{FF'}{AL}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AL}\right)^2 = x^2 \Rightarrow S_3 = x^2 S(CAL), \qquad (1).$$

Din asemănarea triunghiurilor BEE' și BLA rezultă:

$$\frac{S_1}{S(BAL)} = \left(\frac{EE'}{AL}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AL}\right)^2 = x^2 \Rightarrow S_1 = x^2 S(BAL), \qquad (2).$$

Din (1) și (2) avem:

$$S_1 + S_3 = x^2[S(CAL) + S(BAL)] = x^2 S(ABC) = x^2 S, \qquad (3).$$

Din asemănarea triunghiurilor MEL și ABL avem

$$\frac{S(MEL)}{S(ABL)} = \left(\frac{ML}{AL}\right)^2 \Rightarrow S(MEL) = \left(\frac{ML}{AL}\right)^2 S(ABL), \qquad (4).$$

Scanned with OKEN Scanner

Din asemănarea triunghiurilor MFL și ACL rezultă

$$\frac{S(MFL)}{S(ACL)} = \left(\frac{ML}{AL}\right)^2 \Rightarrow S(MFL) = \left(\frac{ML}{AL}\right)^2 S(ACL), \qquad (5).$$

Din (4) și (5) obținem

$$S_2 = S(MEL) + S(MFL) = \left(\frac{ML}{AL}\right)^2 [S(ABL) + S(ACL)] =$$

$$= \left(\frac{ML}{AL}\right)^2 S(ABC) \text{ și deci } S_2 = \left(\frac{ML}{AL}\right)^2 S = \left(\frac{AL - AM}{AL}\right)^2 S =$$

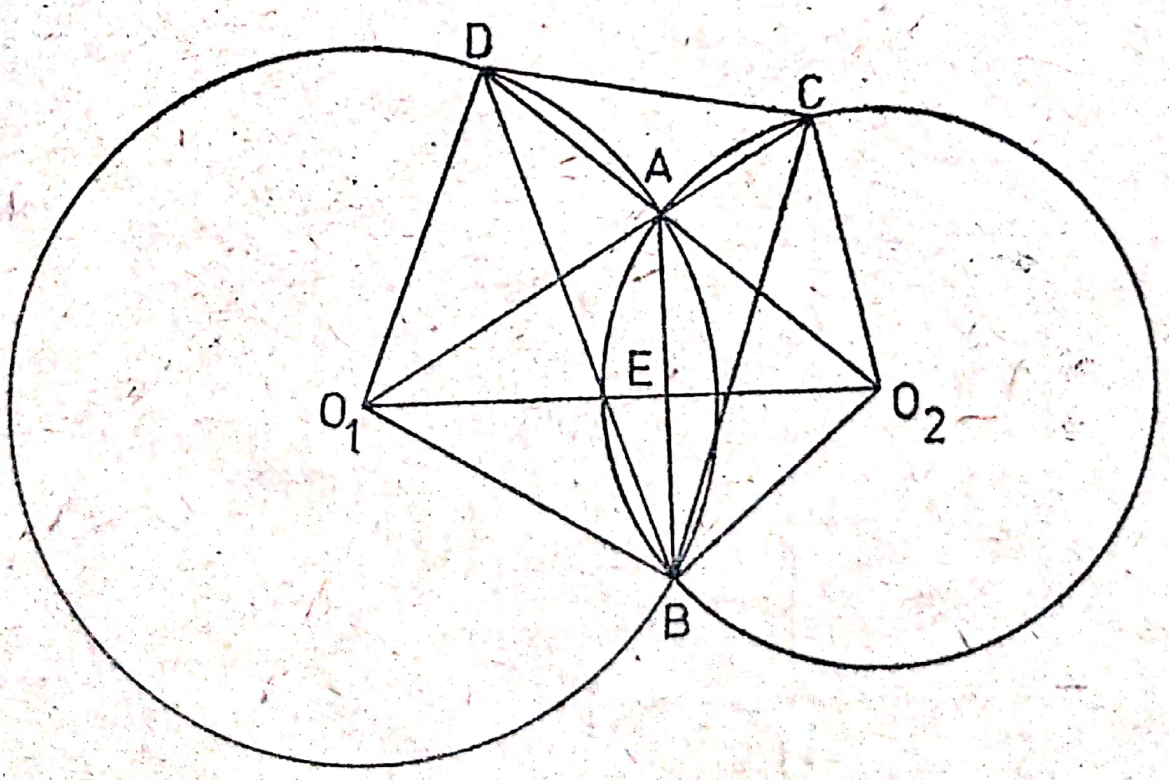
$$= \left(1 - \frac{AM}{AL}\right)^2 S = (1 - x)^2 S, \qquad (6)$$

Din (3) și (6) obținem:

$$S_1 + S_2 + S_3 = x^2 S + (1 - x)^2 S = S(1 - 2x + 2x^2), \qquad (7).$$

Avem că $1 - 2x + 2x^2 \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - 4x + 4x^2 \geqslant 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geqslant 0$ creea ce este evident și deci $1 - 2x + 2x^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Dc aici și din (7) rezultă $S_1 + S_2 + S_3 \geqslant \frac{1}{2} S$.

P 37. Avem $\widehat{O_1AD} \equiv \widehat{O_2AC}$, fiind opuse la vîrf și deoarece triunghiurile O_1AD și O_2AC sînt isoscele, avem $\widehat{O_1AD} \equiv \widehat{O_2AC} \equiv \widehat{O_2CA} = \widehat{O_1DA}$.

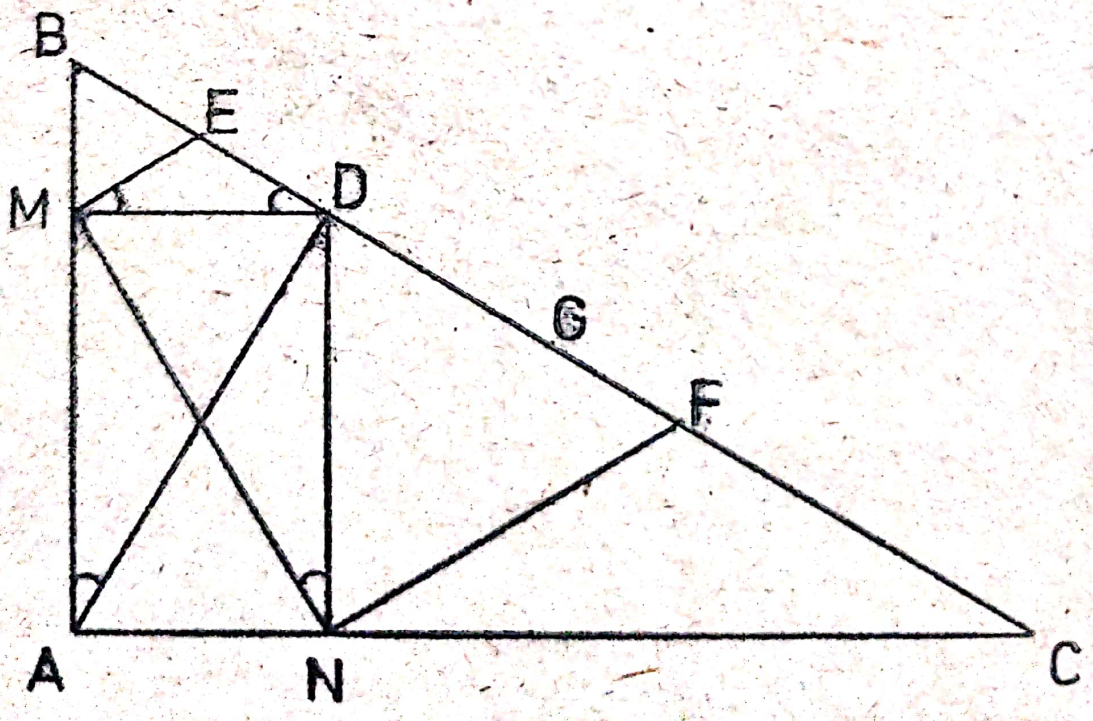


Deci $\widehat{O_1CO_2} \equiv \widehat{O_2DO_1}$ de unde rezultă că patrulaterul O_1O_2CD este inscriptibil $\Rightarrow \widehat{DO_1A} \equiv \widehat{CO_2A}$, (1). Din O_1BAD patrulater inscriptibil rezultă $\widehat{DO_1A} \equiv \widehat{DBA}$, (2). Din $CABO_2$ patrulater inscriptibil rezultă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CO_2A}$, (3). Din (1), (2) și (3) avem $\widehat{DBA} \equiv \widehat{ABC}$ și deci AB este bisectoarea unghiului $\widehat{DBC}$.

Avem $\widehat{DCO_1} \equiv \widehat{DO_2O_1}$ și $m(\widehat{DO_2O_1}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) = m(\widehat{ACB})$ și deci $\widehat{DCO_1} \equiv \widehat{ACB} \Rightarrow AC$ este bisectoarea unghiului DCB. Analog AD este bisectoarea unghiului BDC.

P 38. A arăta că MN este tangentă cercurilor de diametru BD respectiv DC este echivalent cu a arăta că MN este perpendiculară pe ME, respectiv pe NF.

Triunghiul MBD este dreptunghic, ME este mediana unghiului drept, deci $ME = ED$, și rezultă că triunghiul MED este isoscel, adică $\widehat{EMD} = \widehat{EDM}$ și fie $m(\widehat{EMD}) = m(\widehat{EDM}) = \alpha$. Dar triunghiurile MBD și BDA sînt asemenea și deci $\alpha = m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{MND})$ ($ANMD$ este dreptunghi). Rezultă $m(\widehat{EMD}) + m(\widehat{DMN}) = 90°$, $ME \perp MN$. Analog se arată $NF \perp MN$.



Scanned with OKEN Scanner

Folosind formula medianei în triunghiul BMD, respectiv triunghiul DNC, se obține:

$$ME^2 = \frac{MD^2 + MB^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \text{ și } NF^2 = \frac{ND^2 + NC^2}{2} - \frac{DC^2}{4}$$

și în plus în triunghiurile BMD și DNC avem $MB^2 + MD^2 = BD^2$ și $DN^2 + NC^2 = DC^2$, de unde

$$8(ME^2 + NF^2) = 2(BD^2 + DC^2) = 2(BD + DC)^2 - 4BD \cdot DC$$

Dar $BD + DC = \frac{BC}{2} - DG + \frac{BC}{2} + DG = BC$ ceea ce, în definitiv, dă $8(ME^2 + NF^2) = BC^2 + 4DG^2$

P 39. Este cunoscută inegalitatea mediilor $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$, pentru $a, b, c > 0$. Scriind această relație pentru $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$ obținem:

$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \qquad (1)$$

Scriind acum inegalitatea mediilor pentru $a = y$, $b = y$ și $c = z$ avem $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$. Înmulțind această ultimă relație cu (1) obținem:

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) \geqslant 9xyz, \qquad (2)$$

Notăm $S_1 = S(MBC)$, $S_2 = S(MCA)$, $S_3 = S(MAB)$ avem $ad_a = 2S_1$, $bd_b = 2S_2$, $cd_c = 2S_3$. Avem:

$$E = \frac{1}{ad_a} + \frac{1}{bd_b} + \frac{1}{cd_c} = \frac{1}{2S_1} + \frac{1}{2S_2} + \frac{1}{2S_3} = \frac{S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1}{2S_1S_2S_3} \geqslant$$

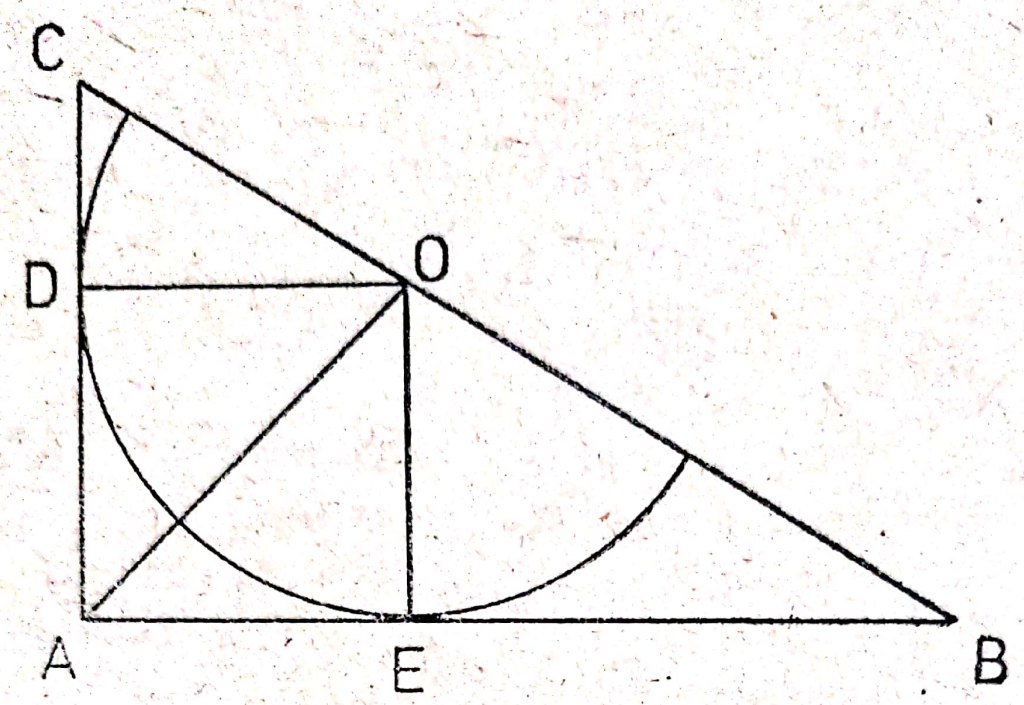
$$\geqslant \frac{9}{2(S_1 + S_2 + S_3)} = \frac{9}{2S}$$

Evident că minimumul expresiei E este $\frac{9}{2S}$. Se știe că inegalitatea mediilor devine egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$.

În cazul nostru egalitatea se realizează dacă și numai dacă $S_1 = S_2 = S_3$ adică M este centrul de greutate al triunghiului.

P 40. Fie D și E punctele de contact ale cercului cu catetele. Rezultă imediat că $ADOE$ este un pătrat. Diagonala AO este și bisectoarea unghiului DAE.

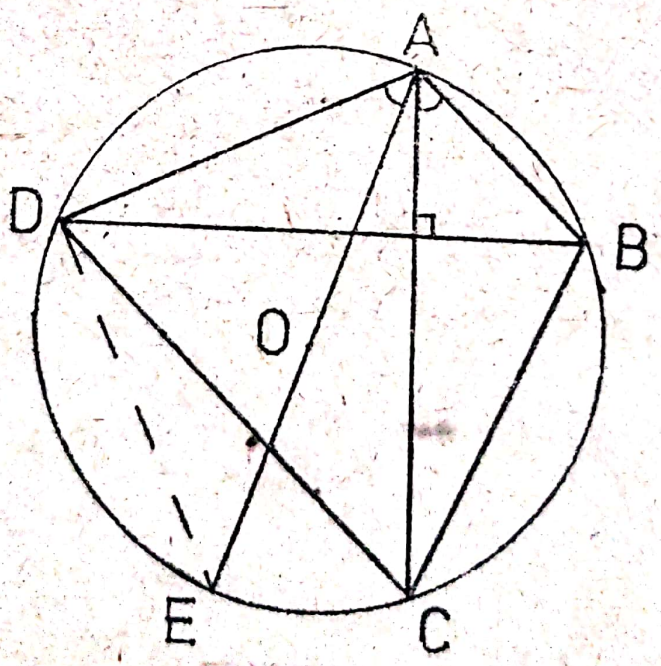
Scanned with OKEN Scanner



Din asemănarea triunghiurilor DOC și ABC avem $\frac{OC}{BC} = \frac{DO}{AB}$, iar din asemănarea triunghiurilor BOE și ABC obținem $\frac{BO}{BC} = \frac{OE}{AC}$.

Adunînd cele două relații și ținînd seama că $OD = OE = R$ avem $\frac{BO + OC}{BC} = \frac{R}{AC} + \frac{R}{AB}$ sau $R\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

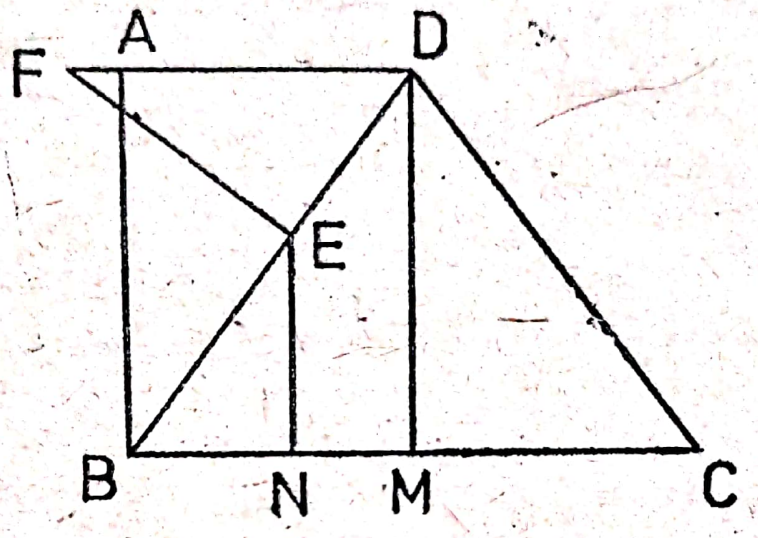
P 41. Trebuie să arătăm că AC și AO sînt izogonale. În triunghiul ABD ele sînt înălțimea și raza cercului circumscris ce pleacă din același vîrf.



Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm E punctul diametral opus lui A, avem $\widehat{ABD} \equiv \widehat{AED} \Rightarrow$ $\Rightarrow 90^\circ - m(\widehat{ABD}) = 90^\circ - m(\widehat{AED}) \Rightarrow m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{BAC})$ adică AO și AC sînt izogonale.

P 42. a) Fie M piciorul perpendicularei din D pe BC. Avem $CD^2 = DM^2 + MC^2 = 25 \Rightarrow CD = 5$. Avem perimetrul 18.



b) Avem $BD = CD = 5$ și deci $ED = 2$. Triunghiurile ABD și DEF sînt asemenea deoarece au unghiul D comun, $m(\hat{A}) = m(\hat{E}) =$ $= 90^\circ$, deci au toate unghiurile egale. Avem $\frac{FE}{AB} = \frac{DE}{AD}$ sau $\frac{FE}{4} =$ $= \frac{2}{3}$ de unde $FE = 8/3$.

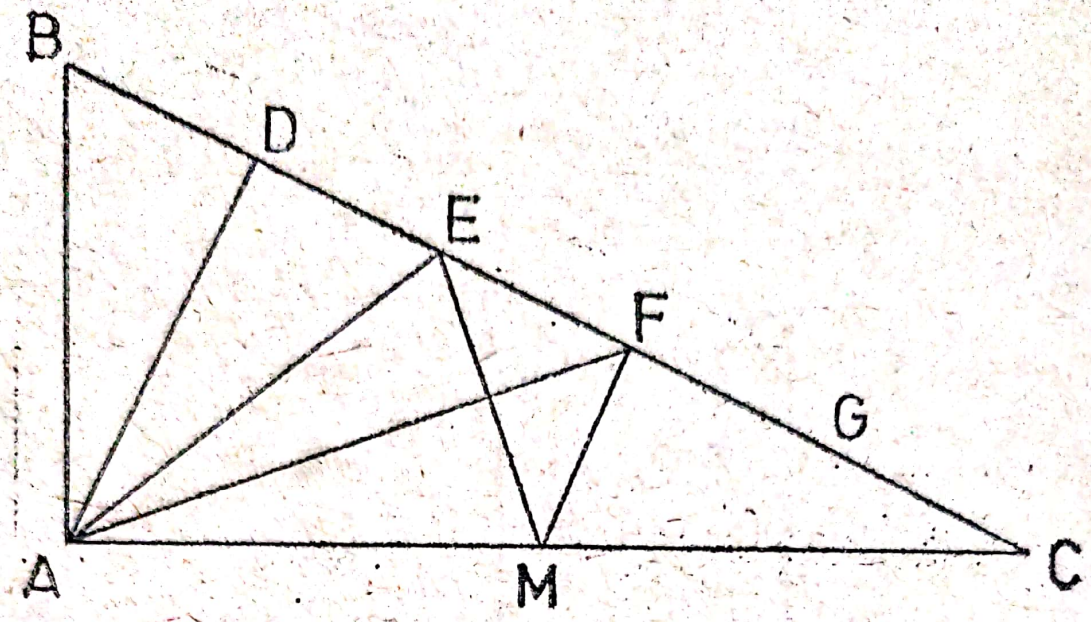
c) Din asemănarea triunghiurilor BEN și BDM rezultă $\frac{EN}{DM} = \frac{BE}{BD}$ de unde $EN = 12/5$.

P 43. Avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$ și $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} =$ $= \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ în care D este piciorul perpendicularei din A pe BC.

Din triunghiul dreptunghic ABD găsim $BD = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Cum $BC =$ $= a\sqrt{5}$ urmează că BD este a cincea parte din BC adică $BD = BC/5$ Luînd BD în compas, împărțim BC în 5 părți egale.

b) Pentru ca triunghiurile BAC și MFC să fie asemenea este suficient să existe proporționalitatea $\frac{FC}{AC} = \frac{MC}{BC}$ ceea ce se verifică imediat, înlocuind cu valorile anterioare.

Scanned with OKEN Scanner



c) Avînd în vedere că perpendiculara AD este mediatoarea segmentului BE rezultă că triunghiul BAE este isoscel. Avem $AB = AE = a$, $AM = a$, $EF = MF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ și deci patrulaterul $AEFM$ este ortodiagonal. Deci $S = \frac{1}{2} AF \cdot EM$ și deoarece $EM = a\sqrt{2/5}$ și $AF = a\sqrt{8/5}$ obținem $S = \frac{2a^2}{5}$.

P 44, Se consideră patrulaterul oarecare $ABCD$. În triunghiurile ABC și ACD avem $AB + BC > AC$, $CD + DA > AC$, (1). Adunînd relațiile (1) se obține $2AC < AB + BC + CD + DA$ de unde, înmulțind cu AC, $2AC^2 < AC(AB + BC + CD + DA)$, (2).

Analog se obține:

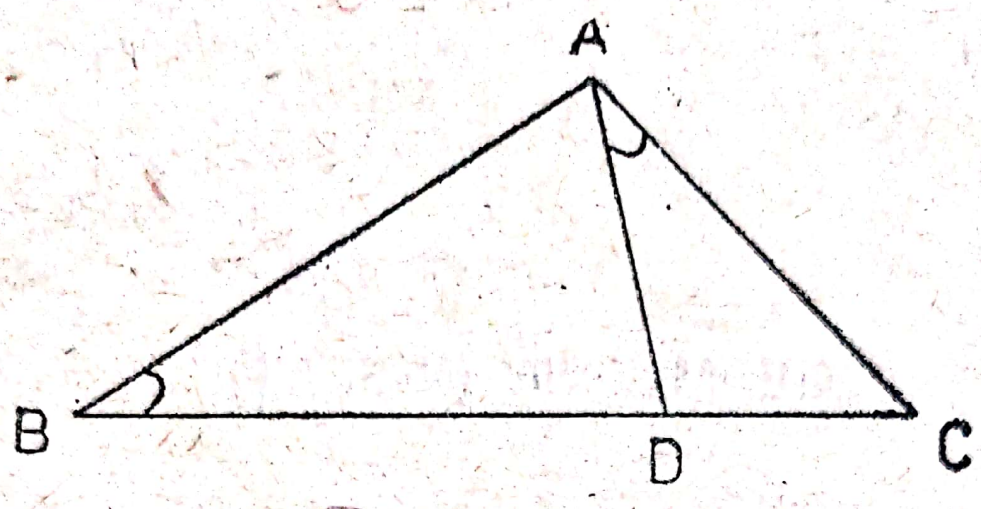
$$2BD^2 < BD(AB + BC + CD + DA), \qquad (3).$$

Adunînd relațiile (2) și (3) și împărțind cu $AC + BD$ obținem

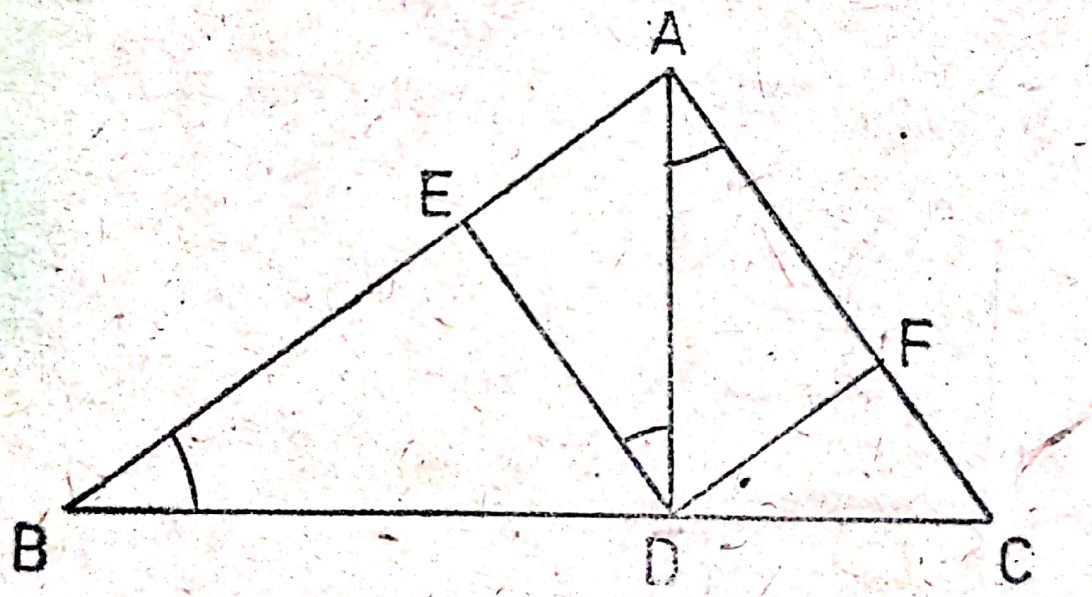
$$(AC^2 + BD^2) / (AC + BD) < (AB + CD + BC + DA)/2$$

P 45. Avem $\Delta ADC \sim \Delta ABC$, deoarece $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DAC}$ și unghiul C este comun.

Deci $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = DC \cdot BC$.



b) Fie $DE \perp AB$. Atunci $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADE}$, fiind unghiuri cu laturile perpendiculare, și deci $\widehat{CAD} = \widehat{ADE} \Rightarrow AC \parallel ED$ și din $ED \perp AB \Rightarrow AC \perp AB$ de unde rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic.



Avem evident $S(ADC) + S(ABD) = S(ABC) \Rightarrow AC \cdot DF + AB \cdot DE = AB \cdot AC$

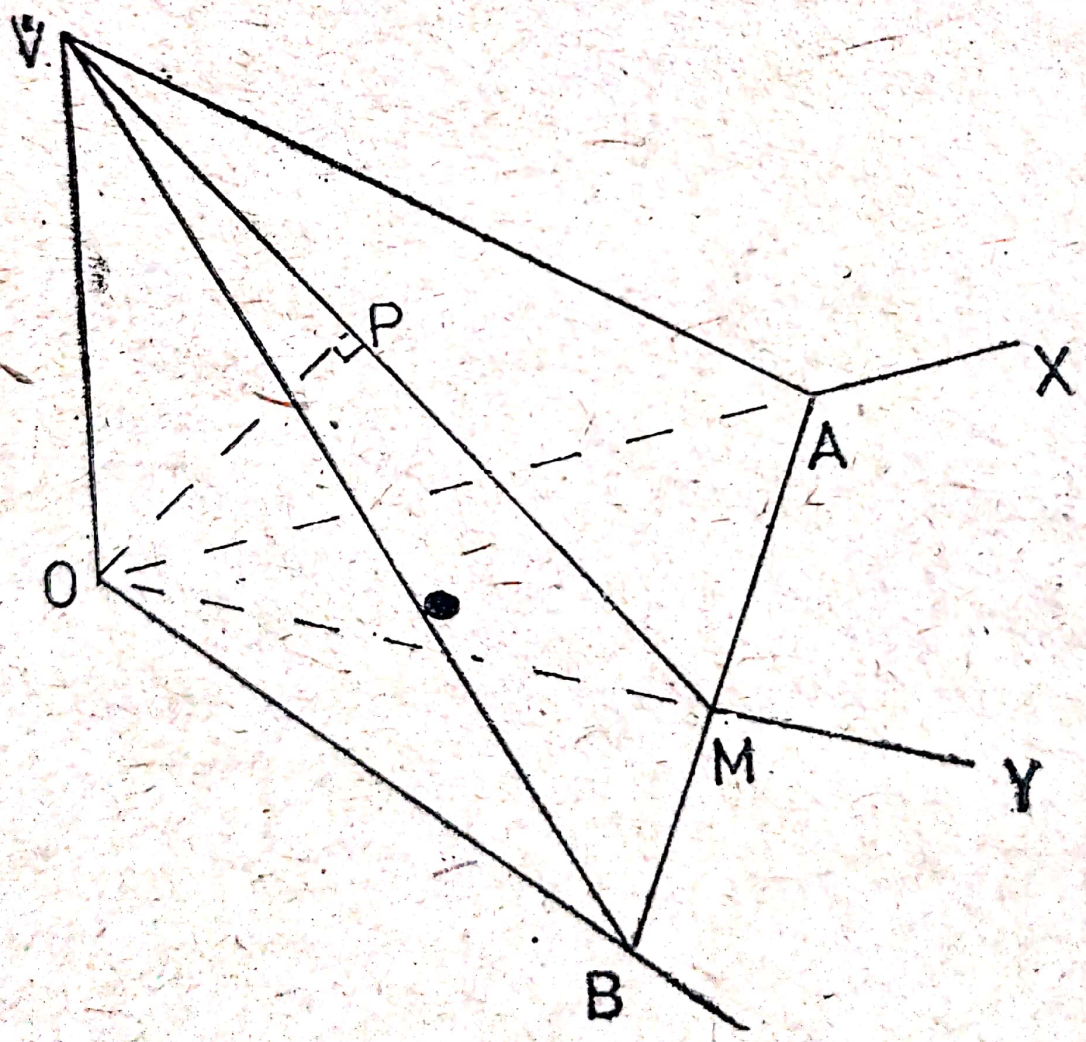
Dar patrulaterul $AEDF$ este dreptunghi și deci $AF = DE$ și $AE = DF$.

Obținem $AC \cdot AE + AB \cdot AF = AB \cdot AC$ adică ceea ce se cerea.

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

S 1. a) În triunghiul $OAB \Rightarrow \sin 45° = AM/OA \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și deoarece triunghiul este dreptunghic isoscel $\Rightarrow OM = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Triunghiurile OAM și OBM sînt congruente deoarece OM este co-



Scanned with OKEN Scanner

mună și $AM = MB$ și deci, $OB = a$ și $MB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Mai mult $m(\widehat{BOM}) = m(\widehat{AOM}) = 45° \Rightarrow \widehat{AOB}$ este unghi drept și triunghiul AOB este dreptunghic și isoscel. Evident $\Delta VOA \equiv \Delta BOV$, deoarece VO comună, $OA \equiv OB$ și sînt dreptunghice $\Rightarrow VB \equiv VA \Rightarrow \Delta VAB$ este isoscel. Din M mijlocul lui $AB \Rightarrow VM \perp AB$ și în $\triangle AOB$, $OM \perp AB$. Din $OM \perp AB$ și $VM \perp AB \Rightarrow \widehat{AMO}$ este unghiul planelor (VAB) și (OAB). În triunghiul VOM avem $\text{tg } 30° = VO/OM \Rightarrow$ $\Rightarrow VO = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Considerăm în continuare că $m(\widehat{VMO}) = 30°$. Vom arăta că $d(O, (VAB))$ este lungimea înălțimii din O în triunghiul VOM. Fie $OP \perp VM$. Din $AB \perp OM$ și $AB \perp VM \Rightarrow AB \perp (VOM) \Rightarrow AB \perp OP$. Deci $OP \perp VM$ și $OP \perp AB \Rightarrow OP \perp (VAB)$ adică $OP = d(O, (VAB))$. În triunghiul $OMP \Rightarrow \sin 30° = OP/OM \Rightarrow OP = OM \cdot \sin 30° =$ $= \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

c) În triunghiul $VOM \Rightarrow \cos 30° = OM/VM \Rightarrow VM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Avem $S(ABV) = \frac{1}{2} AB \cdot VM = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ și $V(VOAB) = \frac{1}{3} S(ABV)\, OP =$ $= \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. În triunghiul $VOM \Rightarrow VO = OM \cdot \text{tg } 30° = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ și $S(VOB) =$ $= \frac{a^2\sqrt{6}}{12} = S(VOA)$; $S(AOB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} a^2$.

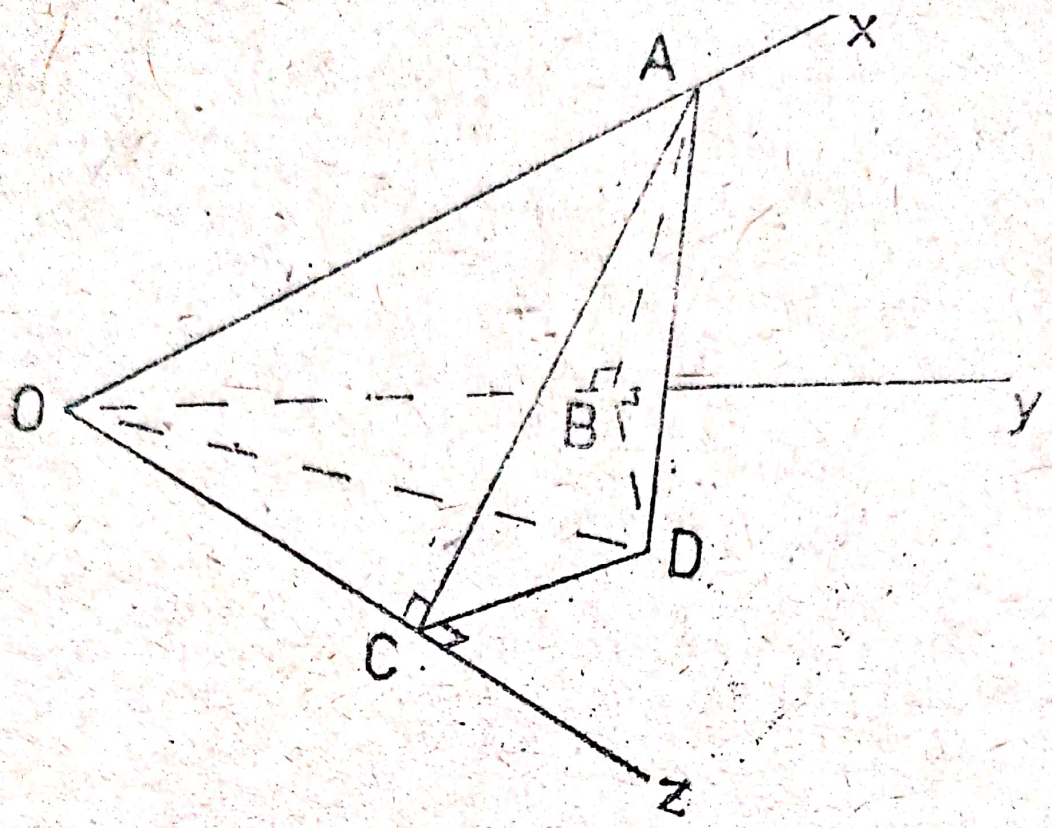
Deci $S_{tot} = a^2\left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ și $V(VOAB) = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

S 2. Fie $AB \perp Oy$. În triunghiul OAB avem $\sin 60° = AB/OA \Rightarrow AB =$ $= a\sqrt{3}$ și $\cos 60° = OB/OA \Rightarrow OB = a$. Analog $AC = a\sqrt{3}$ și $OC = a$.

Fie $AD \perp (yoz)$. Din $AD \perp (yoz)$ și $AB \perp Oy \Rightarrow BD \perp Oy$. Analog $DC \perp Oz$. Avem $\triangle ACD \equiv \triangle ABD$ deoarece $AC \equiv AB$ și AD comună. Deci $CD \equiv BD \Rightarrow D$ aparține bisectoarei unghiului yOz.

În triunghiul OCD avem: $\text{tg } 30° = CD/OC \Rightarrow CD = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ și în triunghiul $ACD \Rightarrow AD^2 = AC^2 - CD^2$ de unde $AC^2 = 8a^2/3$. Rămîne că $AD = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

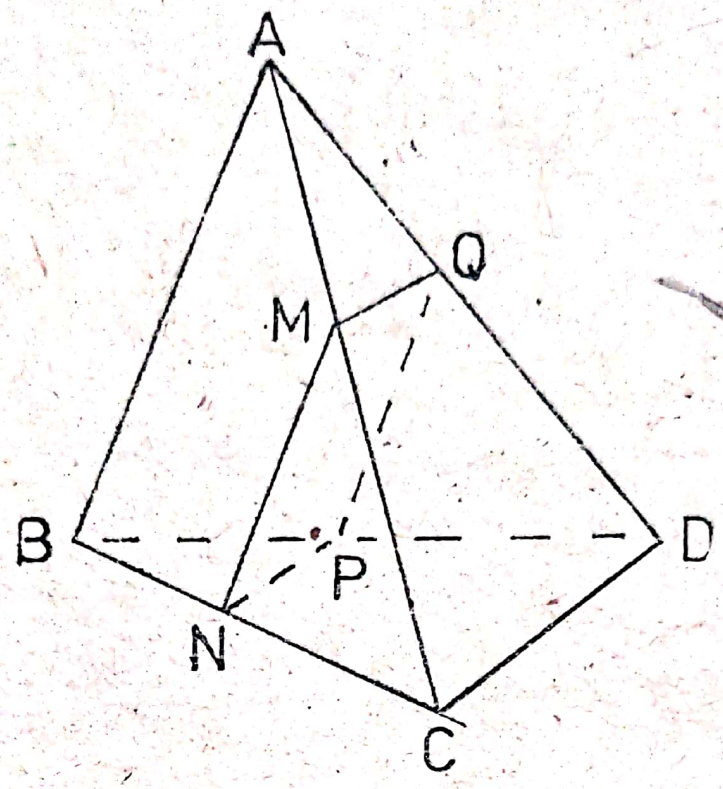
Scanned with OKEN Scanner



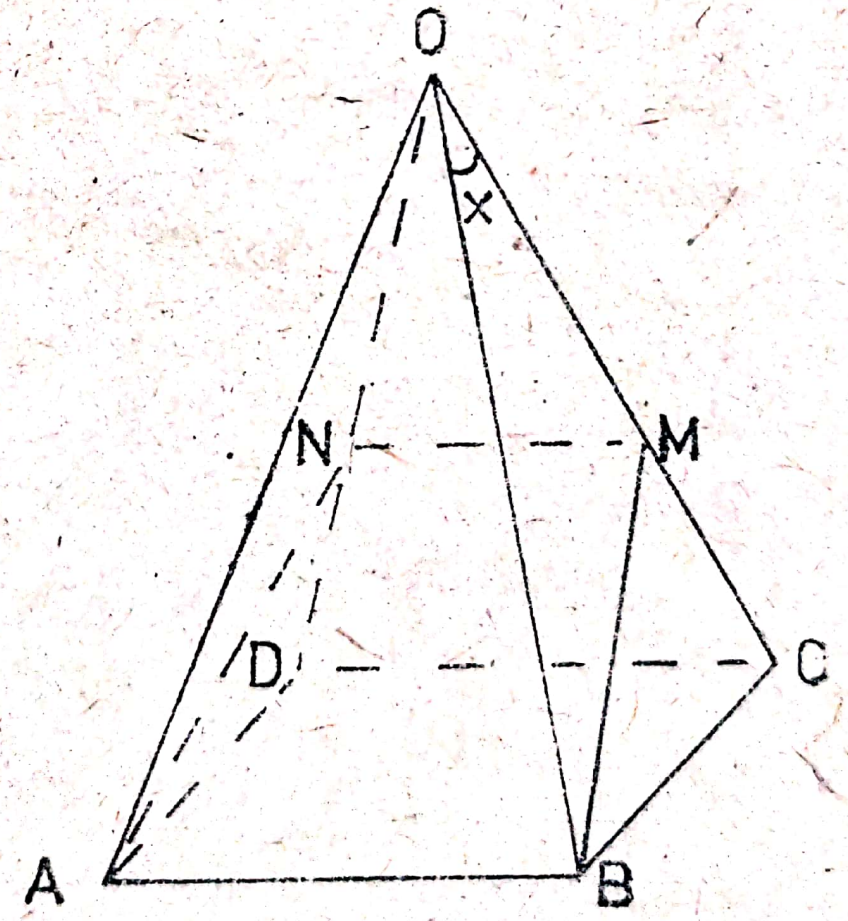
S 3. Fie $h = d(V, (ABC))$. Avem $V(AVPB) = \frac{1}{3} S(APB) \cdot h$, $V(VBPC) = \frac{1}{3} S(BPC) \cdot h$ și $V(VCPA) = \frac{1}{3} S(CPA) \cdot h$. Trebuie deci determinat P astfel încît $S(APB) = S(BPC) = S(CPA)$. Arătăm că G, centrul de greutate, îndeplinește condiția. Aceasta rezultă imediat din exercițiul P 25 luînd $k = 1/3$.

S 4. Fie α planul din enunț, $AB \parallel \alpha$ și $CD \parallel \alpha$. Dacă $AB \parallel \alpha$ atunci orice plan care conține pe AB intersectează pe α după o dreaptă paralelă cu AB. În particular planele (ABC) și (ABD) intersectează pe α după $MN \parallel AB$ și $PQ \parallel AB \Rightarrow MN \parallel PQ$. Analog $MQ \parallel CD$ și $NP \parallel CD \Rightarrow MQ \parallel NP$ și deci $MNPQ$ este paralelogram.
Mai arătăm că $MNPQ$ are un unghi drept. Pentru aceasta este suficient să arătăm că $AB \perp CD$. Fie E mijlocul lui CD. În triunghiul echilateral ACD, AE este mediană $\Rightarrow AE \perp CD$. Analog $BE \perp CD$. Deci $CD \perp BE$ și $CD \perp AE \Rightarrow CD \perp (AEB) \Rightarrow CD \perp AB$.
Rămîne că $MNPQ$ este dreptunghi. Fie $AM = x \Rightarrow MC = a - x$ și deoarece triunghiul MNC este tot echilateral $\Rightarrow MN = a - x$. Din $NC = a - x \Rightarrow BN = x$ și deoarece triunghiul BNP este tot echilateral $\Rightarrow NP = x$. Deci $S(MNPQ) = x(a - x)$. Avem $x + a - x = a$ și se știe că dacă suma a două variabile pozitive este constantă atunci produsul lor este maxim atunci cînd ele sînt egale. Deci $x = a - x \Rightarrow x = a/2 \Rightarrow S(MNPQ) = a^2/4$.

Scanned with OKEN Scanner



S 5. a) Deoarece $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel \alpha$. Atunci orice plan care conține pe CD intersectează pe α după o dreaptă paralelă cu CD. Deci $MN \parallel CD$ și din $CD \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AB$, (1). În triunghiul isoscel OCD



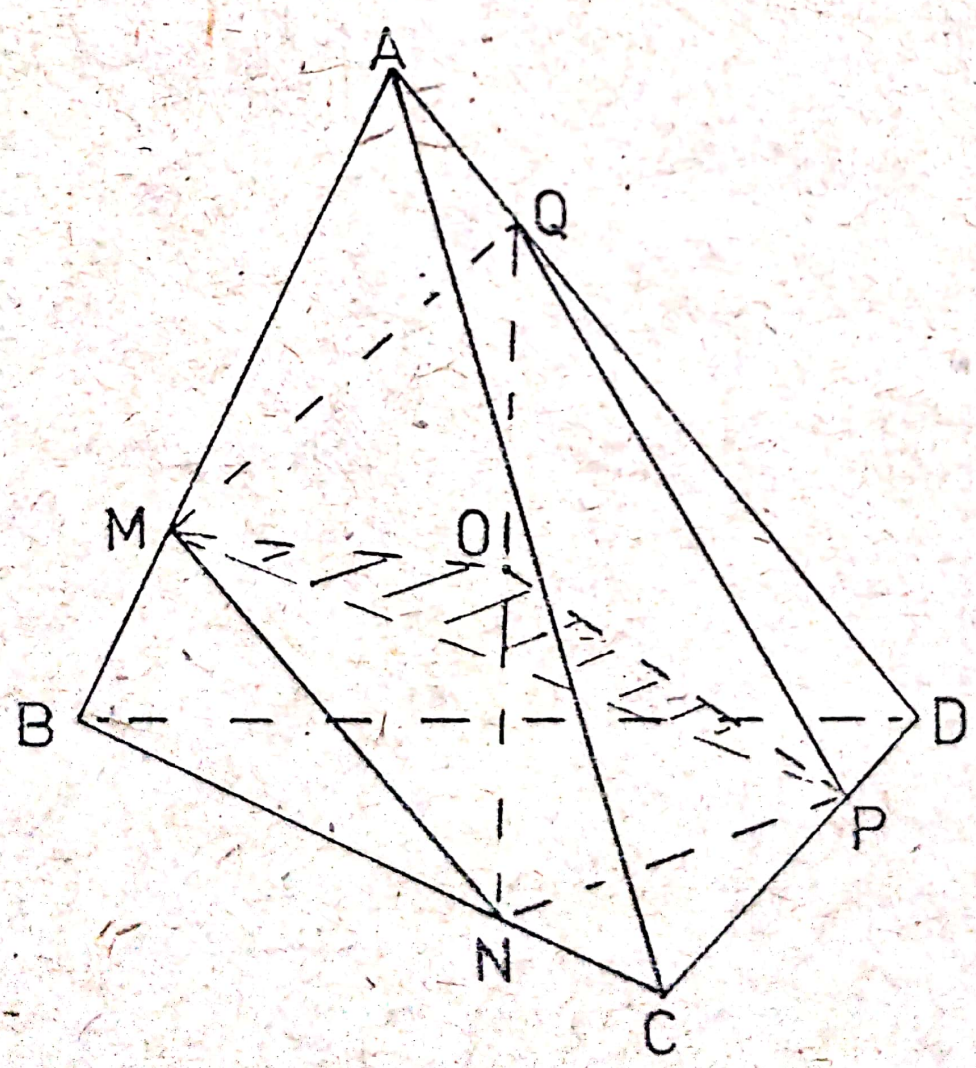
Scanned with OKEN Scanner

avem $MN \parallel CD \Rightarrow OM \equiv ON \Rightarrow MC \equiv DN$. Triunghiurile BCM și ADN sînt congruente, deoarece $BC \equiv AD$, $MC \equiv ND$ și $BCM \equiv ADN$. Deci $BM \equiv AN$. Din (1) și ultimul rezultat obținut, rezultă $ABMN$ trapez isoscel.

b) Fie x unghiul de la vîrful 0 al unei fețe laterale. Avem $S(OBM) = \frac{1}{2} OB \cdot OM \cdot \sin x$, $S(OAB) = \frac{1}{2} OB^2 \sin x$, $S(OMN) = \frac{1}{2} OM^2 \sin x$. Deci $S^2(OBM) = \frac{1}{4} OB^2 OM^2 \sin^2 x = \frac{1}{2} OB^2 \sin x \cdot \frac{1}{2} \cdot OM^2 \sin x = S(OAB) \cdot S(OMN)$ *c.c.t.d.*

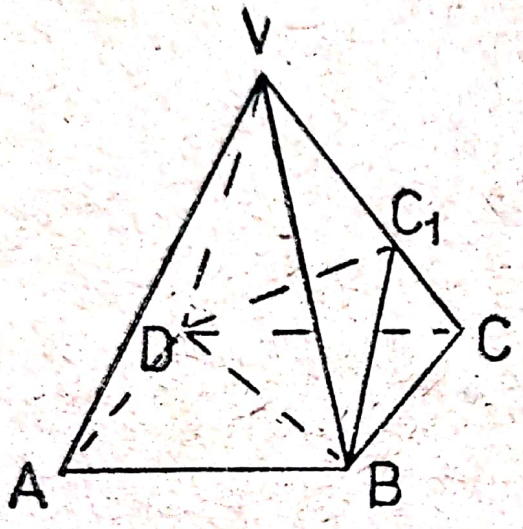
S 6. Fie $AM = x \Rightarrow AN = a - x$. Deoarece distanța de la punctul P la planul $(ABCD)$ este a rezultă că volumul $V(PAMN) = \frac{1}{6} ax(a-x)$. Este clar volumul este maxim dacă produsul $x(a-x)$ este maxim. Dar $x + (a - x) = a =$ constant și deci produsul este maxim cînd $x = a - x \Rightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{maxim} = \frac{1}{6} a \frac{a}{2} \frac{a}{2} = a^3/24$.

S 7.



Scanned with OKEN Scanner

Avem $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM$, deoarece $AM \equiv BN$, $AQ \equiv BM$ și $\widehat{MAQ} = \widehat{NBM}$. Rezultă $MN \equiv MQ \Rightarrow \triangle NMQ$ este isoscel. MO fiind mediană într-un triunghi isoscel $\Rightarrow MO$ înălțime, adică $MO \perp NQ$. Analog $PO \perp NQ$. Din $NQ \perp PO$ și $NQ \perp MO \Rightarrow NQ \perp (MOP)$.



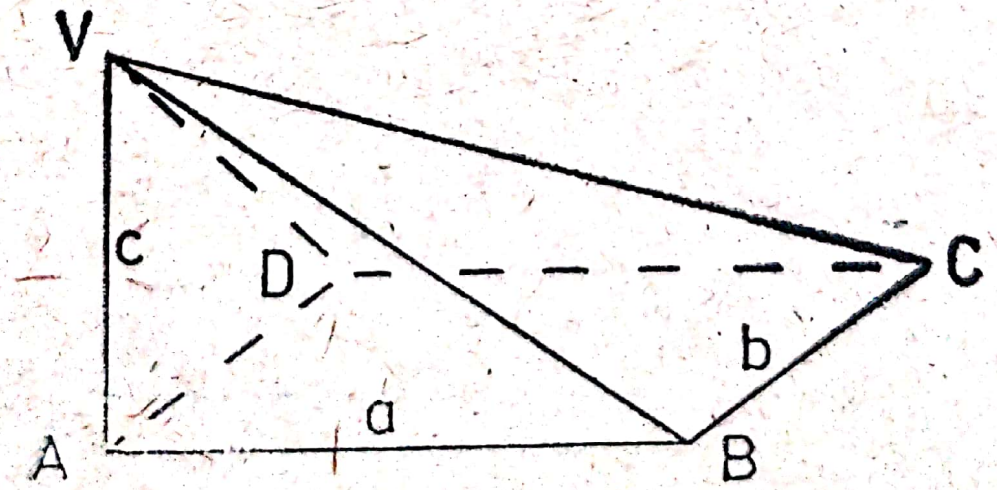
S 8. Deoarece (VBC) și (VCD) sînt triunghiuri echilaterale rezultă $BC_1 \perp VC$ și $DC_1 \perp VC \Rightarrow VC \perp (BDC_1)$. Atunci orice plan care conține pe VC este perpendicular pe (BDC_1). În particular planele (VBC), (VDC), (VAC) sînt perpendiculare pe planul (BDC_1).

S 9. Considerăm $AB = a$, $BC = b$, $AV = c$, $a > b$ și $\alpha = (ABCD)$. Din $VA \perp \alpha$ și $AB \perp BC \Rightarrow VB \perp BC$. Din $VA \perp \alpha$ și $AD \perp DC \Rightarrow$ $\Rightarrow VD \perp CD$. Evident triunghiurile VAB și VAD sînt dreptunghice.

Avem $S(VAB) = \frac{1}{2} ac$, $S(VBC) = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2 + c^2}$, $S(VCD) =$

$= \frac{1}{2} a\sqrt{b^2 + c^2}$ și $S(VAD) = \frac{1}{2} bc$ și $VC^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Trebuie demonstrat că:

$$VC^4 \geqslant 6[S^2(VAB) + S^2(VBC) + S^2(VCD) + S^2(VAD)]$$



Scanned with OKEN Scanner

relație echivalentă cu:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant \frac{3}{2}\,[a^2c^2+b^2(a^2+c^2)+a^2(b^2+c^2)+b^2c^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2) \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-$$

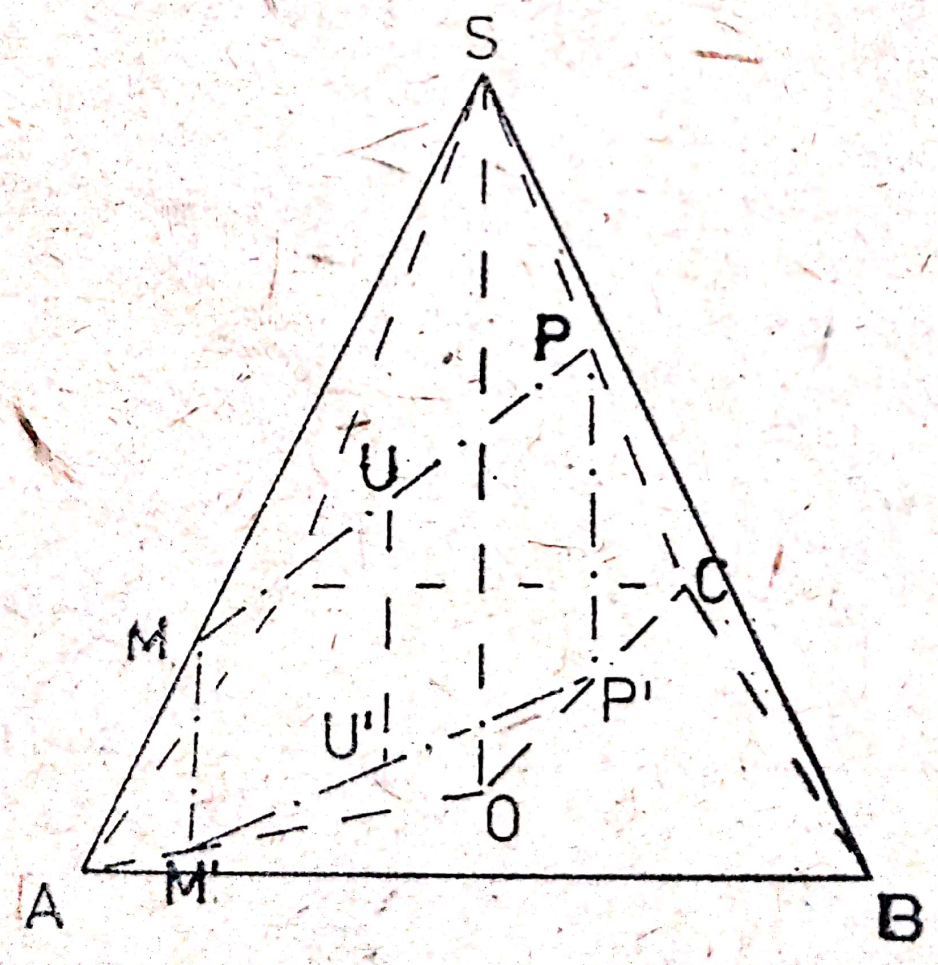
$$-a^2c^2-b^2c^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2 \geqslant$$

$$\geqslant 0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(a^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2 \geqslant 0$$

ceea ce este evident.

S 10. Fie $SA = SB = SC = SD = l$, $SO \perp (ABCD)$, $AM + CP = BN + DQ = k$. Se știe că dacă o piramidă are muchiile laterale congruente atunci poligonul bazei se poate înscrie într-un cerc cu centrul în piciorul înălțimii piramidei, deci, în cazul nostru, O. Mai mult $ABCD$ este patrulater inscriptibil $\Rightarrow ABCD$ este pătrat, dreptunghic sau trapez isoscel. Vom face demonstrația pentru $ABCD$ trapez și lăsăm cititorul să analizeze celelalte cazuri (vă invităm să observați că celelalte se pot rezolva, ținînd seama de demonstrația pe care o facem mai jos.

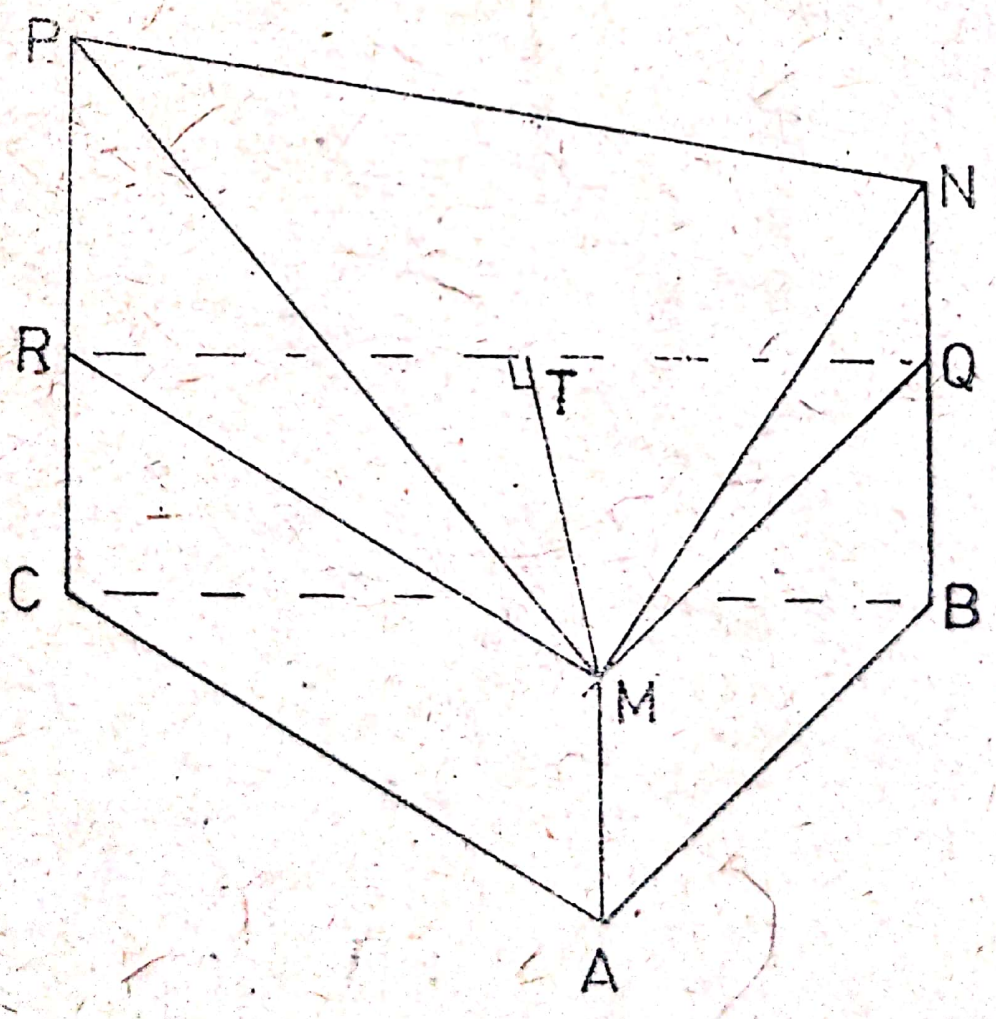
Fie $MM' \perp (ABCD)$. Din $SO \perp (ABCD)$ rezultă că planul $(SAO) \perp (ABCD)$ și deci $M' \in AO$. Fie $PP' \perp (ABCD)$ și analog $P' \in OC$.



Fie $UU' \perp (ABCD)$ Avem $\triangle CPP' \sim \triangle CSO \Rightarrow \frac{CP}{l} = \frac{PP'}{h}$ și $\triangle AMM' \sim \triangle ASO \Rightarrow \frac{AM}{l} = \frac{MM'}{h}$. Rezultă $\frac{AM + CP}{l} = \frac{MM' + PP'}{h} \Rightarrow \frac{k}{l} = \frac{MM' + PP'}{h} \Rightarrow MM' + PP' = \frac{kh}{l}$ și deoarece UU' este linie mijlocie în trapezul $MM'P'P$ obținem $UU' = \frac{kh}{2l}$. Analog va rezulta că $VV' = \frac{kh}{2l}$. Deci distanțele de la U și de la V la planul $(ABCD)$ sînt egale și deci $UV \perp (ABCD)$.

S 11. Alegem $a \leqslant b \leqslant c$. Prin M ducem $MQ \parallel AB$, $Q \in BN$, și prin Q ducem $QR \parallel BC$, $R \in CP$. Avem că $ABCMQR$ este o prismă triunghiulară dreaptă $\Rightarrow V(ABCMQR) = aS(ABC)$, (1). Fie $MT \perp QR$. Deoarece planele (MQR) și $(BCRQ)$ sînt perpendiculare $\Rightarrow MT \perp (BCRQ)$.

Pentru piramida $MQRPN$ avem $V(MQRPN) = \frac{1}{3} S(QRPN) \cdot MT = \frac{1}{6} (QN + PR) \cdot QR \cdot MT = \frac{1}{3} (b - a + c - a) \frac{1}{2} QR \cdot$



$\cdot MT = \frac{1}{3}(b + c - 2a)\, S(MQR)$ și deoarece $S(MQR) = S(ABC) \Rightarrow$

$\Rightarrow V(MQRPN) = \frac{1}{3}(b + c - 2a)\, S(ABC)$, (2).

Din (1) și (2) avem $V(ABCMNP) = V(ABCMQR) + V(MQRPN) =$

$= aS(ABC) + \frac{1}{3}(b + c - 2a)\, S(ABC) = S(ABC)\, \frac{a + b + c}{3}$.

S 12. Din problema anterioară avem:

$$V(ABCMNP) = S(ABC)\, \frac{a + b + c}{3} = \frac{S(ABCD)}{2}\, \frac{a + b + c}{3}$$

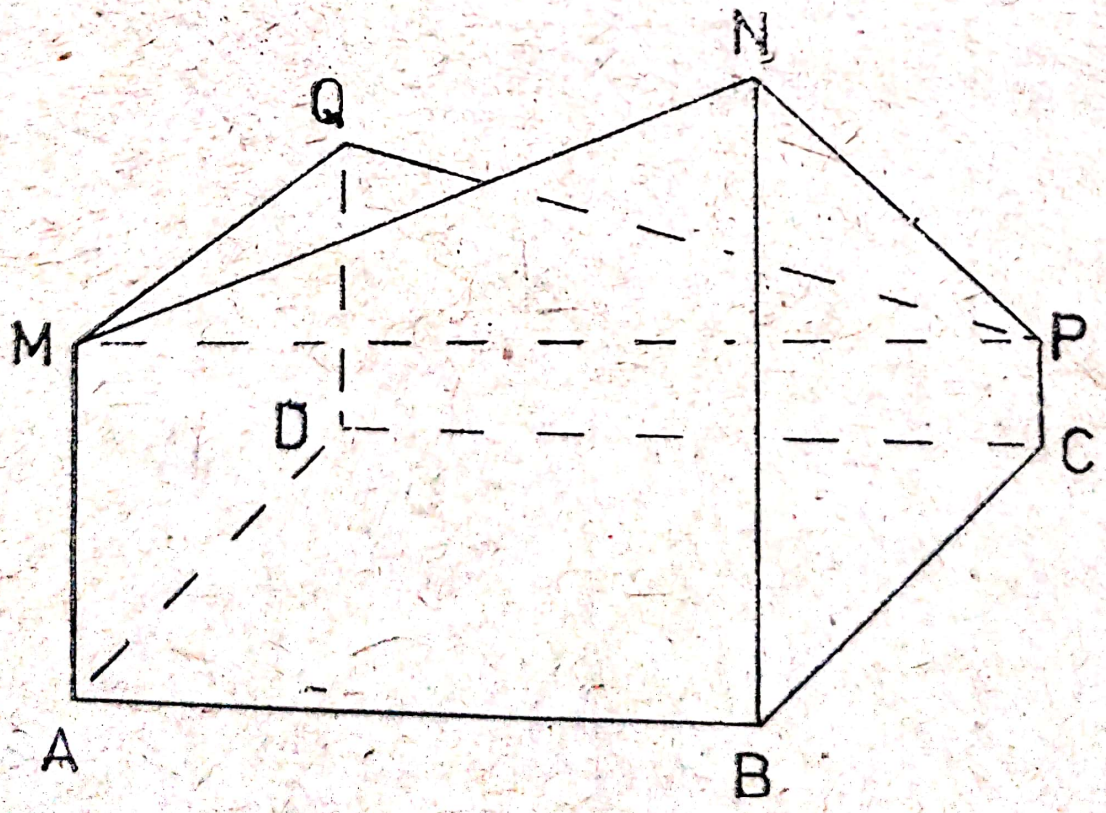
$$V(ADCMQP) = S(ACD)\, \frac{a + d + c}{3} = \frac{S(ABCD)}{2}\, \frac{a + d + c}{3}$$

$$V(BCDNPQ) = S(BCD)\, \frac{b + c + d}{3} = \frac{S(ABCD)}{2}\, \frac{b + c + d}{3}$$

$$V(BADNMQ) = S(BAD)\, \frac{b + a + d}{3} = \frac{S(ABCD)}{2}\, \frac{b + a + d}{3}$$

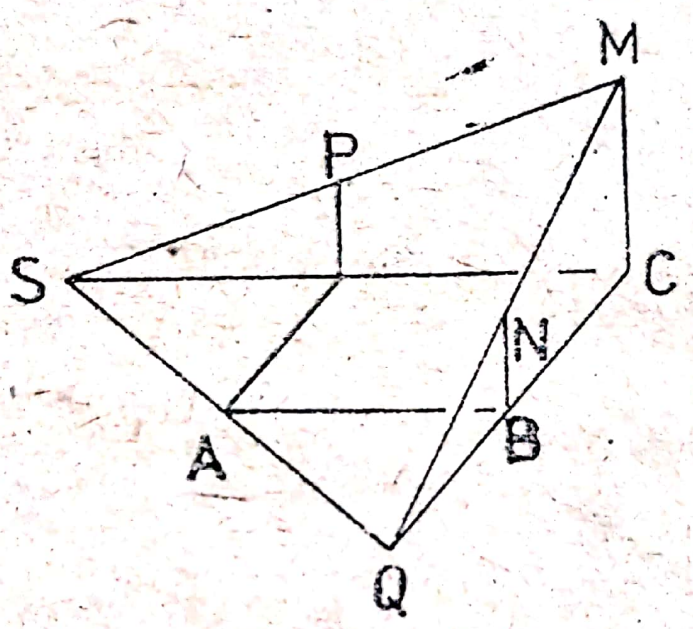
Adunînd toate relațiile obținem, după împărțire cu 2,

$$V(ABCDMNPQ) = S(ABCD)\, \frac{a + b + c + d}{4}$$



Scanned with OKEN Scanner

S 13. În QMC, NB este linie mijlocie $\Rightarrow BQ = 2a \Rightarrow BQA$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\widehat{QAB}) = 45°$. Analog $SD = 2a$ și $m(\widehat{SAD}) = 45°$ și deoarece $m(\widehat{DAB}) = 90° \Rightarrow m(\widehat{SAQ}) = 180° \Rightarrow A \in QS$.
În triunghiul MCQ: $MQ^2 = 20a^2 \Rightarrow MQ = 2a\sqrt{5} = MS$. În triunghiul $ABQ \Rightarrow AQ^2 = 8a^2 \Rightarrow AQ = 2a\sqrt{2}$. În triunghiul dreptunghic AMQ, $AM = 2a\sqrt{3}$ și deci $S(MSQ) = \frac{1}{2} SQ \cdot AM = 4a^2\sqrt{6}$.



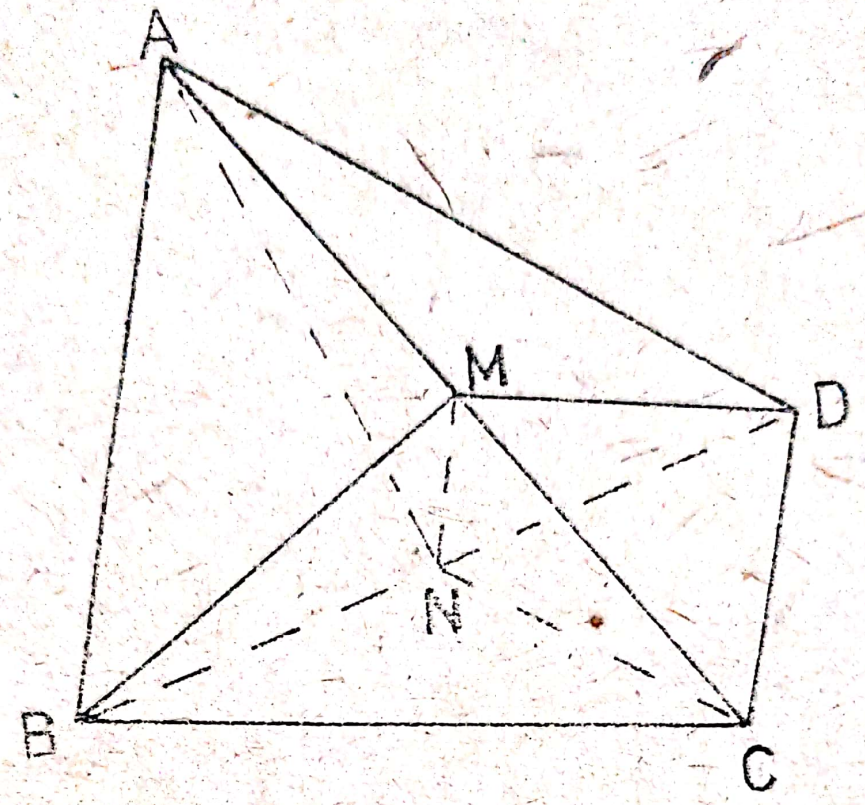
S 14. Fie D_1 mijlocul lui BC. Triunghiul ABC fiind echilateral rezultă $AD_1 \perp BC$. Avem $BC \perp AD_1$ și, din ipoteză, $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (ADD_1) \Rightarrow BC \perp DD_1$. Avem acum că triunghiurile BDD_1 și CDD_1 sînt congruente $\Rightarrow CD = BD$ și tetraedrul este regulat.

S 15. Triunghiurile ABC și ADC sînt congruente și isoscele. BM și DM fiind mediane corespunzătoare laturilor congruente în triunghiuri congruente, sînt congruente. Deci $BM = DM$ și, prin urmare, triunghiul BDM este isoscel. MN este mediană în triunghiul isoscel $BMD \Rightarrow MN \perp BD$, (1). Analog triunghiul ANC este isoscel și deci $NM \perp AC$, (2). Din (1) și (2) rezultă a). În triunghiul BMD aplicăm formula medianei și avem:

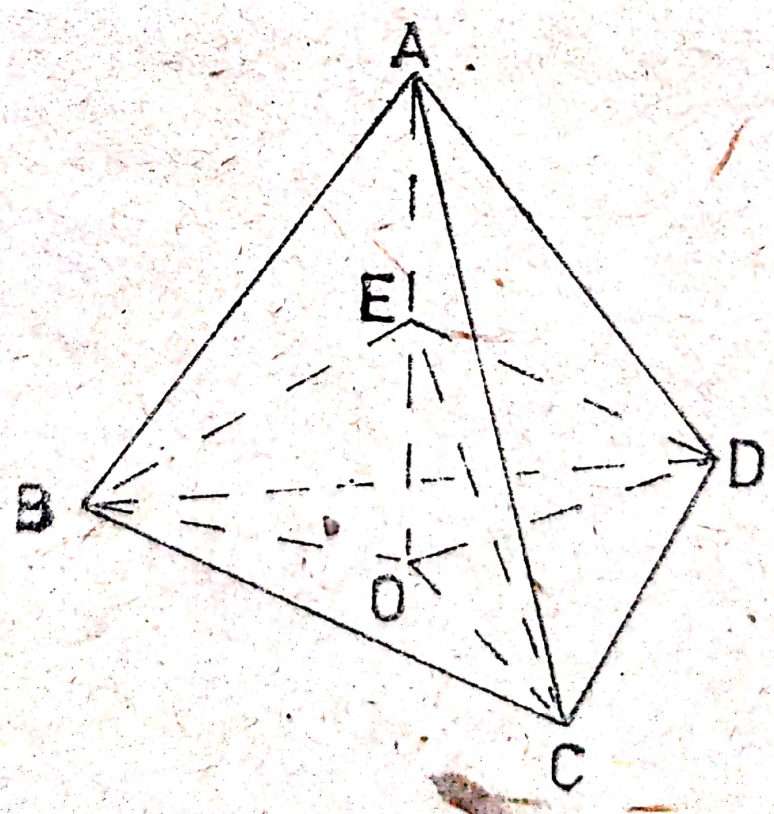
$$MN^2 = \frac{BM^2 + MD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} = BM^2 - \frac{BD^2}{4}, \quad (3).$$

În triunghiul ABC avem $BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = a^2 - \frac{AC^2}{4}$, (4). Înlocuind (4) în (3) obținem $MN^2 = a^2 - \frac{AC^2 + BD^2}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner



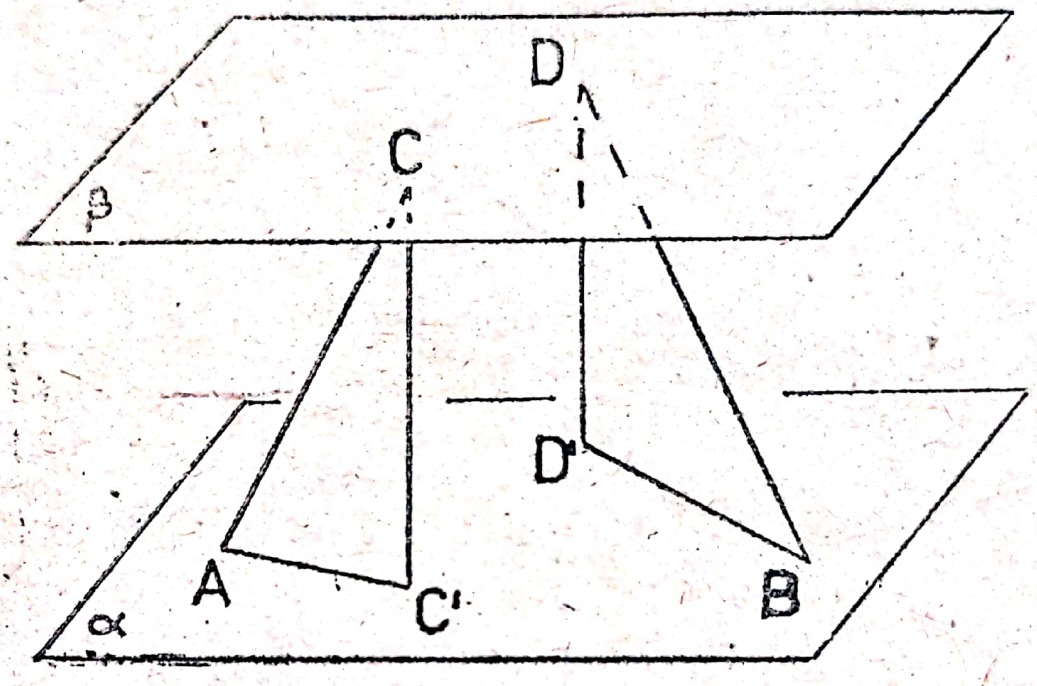
S 16. Fie $AO \perp (BCD)$ și E mijlocul lui AO. Fie $AB = a$.
Avem $AO = a\sqrt{2}/\sqrt{3} \Rightarrow AE = EO = a/\sqrt{6}$ și $BO = CO = DO = a\sqrt{3}/3$.



Scanned with OKEN Scanner

În triunghiul COE avem $CE^2 = CO^2 + EO^2 = a^2/2$. În triunghiul CED avem $CE^2 + ED^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = CD^2 \Rightarrow CE \perp ED$. Analog $CE \perp EB$ și $EB \perp ED$.

S 17. Fie $CC' \perp \alpha$ și $DD' \perp \alpha$. Deoarece planele α și β sînt paralele $\Rightarrow$ $\Rightarrow CC' = DD' = d$.

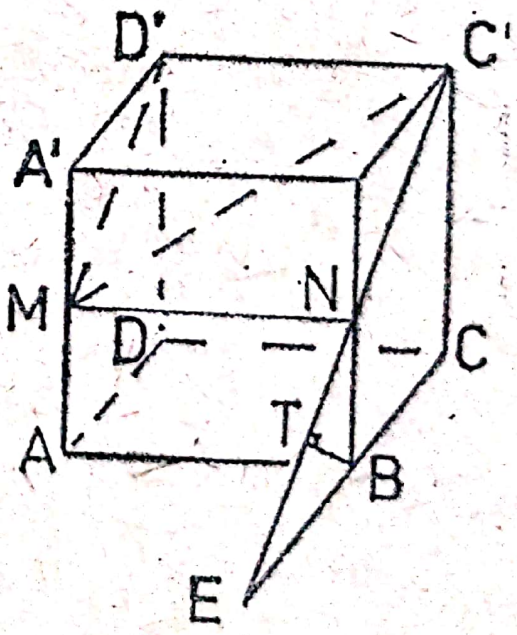


În triunghiurile dreptunghice CAC' și DBD' avem $x^2 = 169\,a^2 - d$ și $y^2 = 25\,a^2 - d^2$. Din enunț $x + y = 14\,a$ și deci am obținut sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 14a \\ x^2 = 169a^2 - d^2 \\ y^2 = 225a^2 - d^2 \end{cases}$$

Scăzînd ultimele două relații avem $y^2 - x^2 = 56a^2$ și folosind prima relație găsim $y - x = 4a$. În definitiv obținem:

$x = 5a$, $y = 9a$, $d = 12a$.

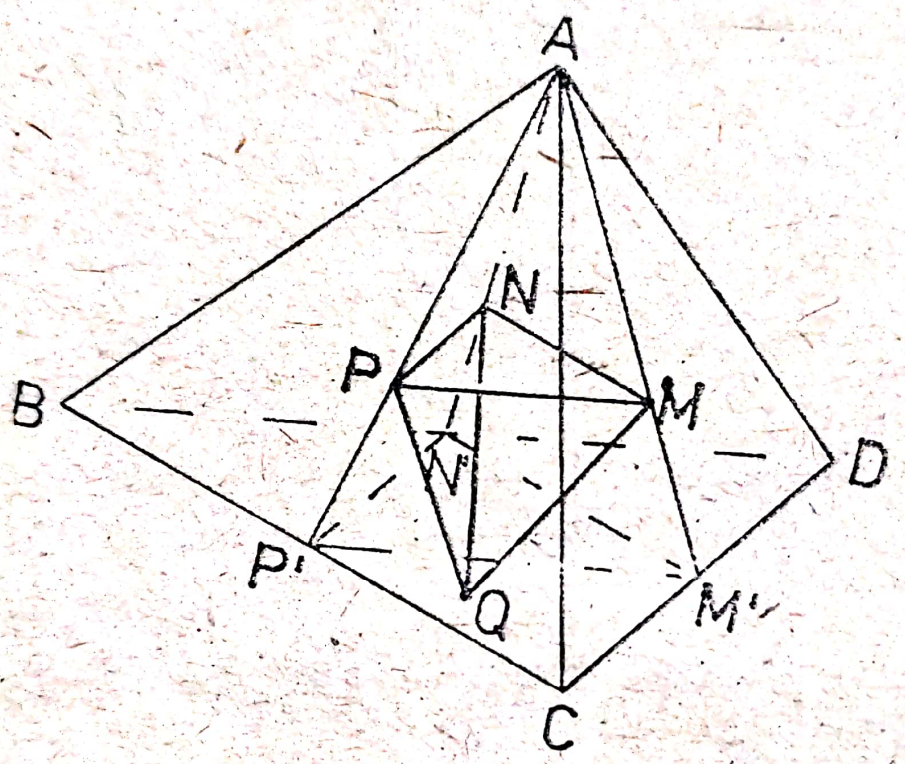


S 18. Fie $\alpha = (MC'D')$. Deoarece $C'D' \parallel (ABB'A')$ punînd $MN = \alpha \cap (ABB'A')$ cu $N \in BB'$, rezultă $MN \parallel C'D' \Rightarrow MN \parallel A'B'$. Fie $BT \perp NC'$. Din $C'D' \perp (BCC'B') \Rightarrow$ $\Rightarrow C'D' \perp BT$. Deci $BT \perp C'D'$ și $BT \perp NC' \Rightarrow BT \perp \alpha$ și deci BT

Scanned with OKEN Scanner

este distanța de la B la planul α. Avem $\triangle BTN \sim \triangle C'B'N$ avînd unghiurile congruente și deci $\frac{BT}{B'C'} = \frac{NB}{NC'}$ și înlocuind $NB = a/2$, $B'C' = a$ și $NC' = a\sqrt{5}/2$ rezultă $BT = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

S 19. Fie M centrul de greutate al feței ACD, N al feței ABD și P al feței ABC. Fie $AM \cap CD = \{M'\}$, $AN \cap BD = \{N'\}$, $AP \cap BC = \{P'\}$.



Din $\frac{AN}{AN'} = \frac{AM}{AM'} = \frac{AP}{AP'} = \frac{2}{3}$ și asemănări rezultă că triunghiul NPM este asemenea cu $N'M'P' \Rightarrow \frac{S(NPM)}{S(N'M'P')} = \frac{4}{9}$. Triunghiul $N'M'P'$ fiind format din mijloacele laturilor triunghiului $BCD \Rightarrow \frac{S(N'M'P')}{S(BCD)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S(NPM)}{S(BCD)} = \frac{S(NPM)}{S(N'M'P')} \cdot \frac{S(N'M'P')}{S(BCD)} = \frac{4}{9}\frac{1}{4} = \frac{1}{9}$, (1).

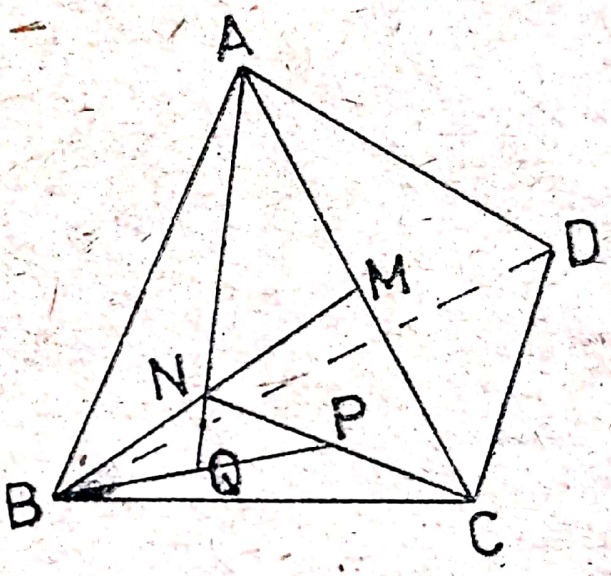
Deoarece $NP \parallel N'P'$ și $NM \parallel N'M' \Rightarrow (NMP) \parallel (BCD) \Rightarrow$ distanța de la Q la planul (NMP) este distanța dintre planele (BCD) și (NMP). Dar planul (NMP) este la $\frac{2}{3}$ din distanța de la A la planul

(BCD). Deci $d(Q, (NMP)) = \frac{1}{3}\ d(A, (BCD))$ și din (1) avem

$$\frac{V(MNPQ)}{V(ABCD)} = \frac{\frac{1}{3}S(NMP)\ \ d(Q, (NMP))}{\frac{1}{3}S(BCD)\ \ d(A, (BCD))} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

S 20. Este suficient să demonstrăm că A,N,Q sînt coliniare.

În triunghiul CNA, MP este linie mijlocie $\Rightarrow AN \| MP$, (1). În triunghiul BPM, NQ este linie mijlocie de unde $NQ \| MP$, (2). Din



(1) și (2) și unicitatea paralelei la MP dusă prin N rezultă A,N,Q coliniare.

Dreptele AQ și AD fiind concurente în A rezultă că sînt coplanare, deci A,N,Q,D coplanare.

Reamintim că dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă dintr-un plan atunci ea este paralelă cu planul. În cazul nostru $MP \| AQ \Rightarrow$ $\Rightarrow MP$ este paralelă cu planul (ADQ).

S 21. Fie $AA_1 \perp (A_2A_3A_4)$ și $MM_1 \perp (A_2A_3A_4)$. Avem $\Delta B_1MM_1 \sim$ $\sim \Delta B_1A_1A'_1$ și $\frac{MB_1}{A_1B_1} = \frac{MM_1}{A_1A'_1} \Rightarrow \frac{V(MA_2A_3A_4)}{V(A_1A_2A_3A_4)} =$

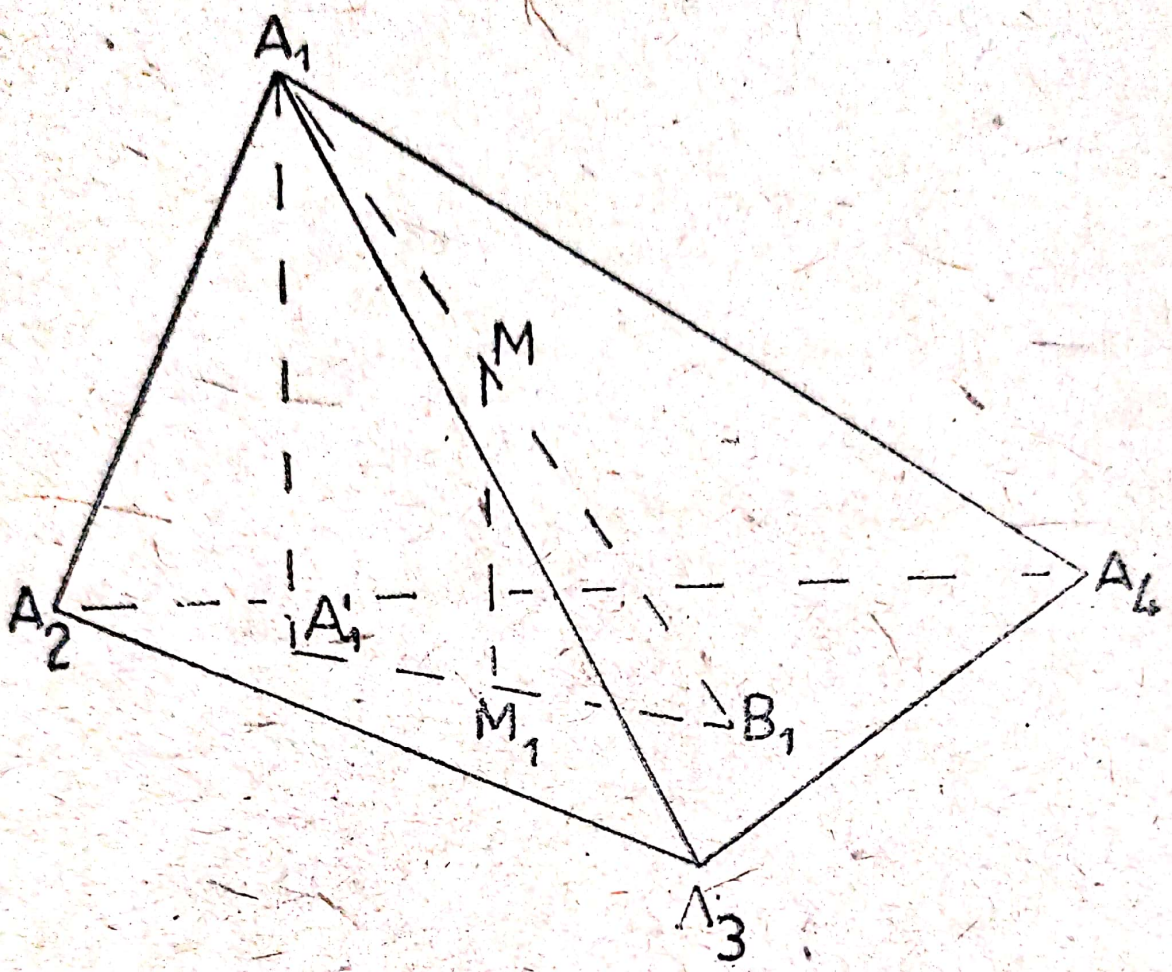
$$= \frac{MM_1 \cdot S(A_2A_3A_4)}{A_1A'_1 \cdot S(A_2A_3A_4)} = \frac{MM_1}{A_1A'_1}$$

și analoagele.

Deci $\frac{MM_1}{A_1A'_1} + \frac{MM_2}{A_2A'_2} + \frac{MM_3}{A_3A'_3} + \frac{MM_4}{A_4A'_4} = \frac{V(A_1A_2A_3A_4)}{V(A_1A_2A_3A_4)} =$

$= 1$ și prin urmare $\sum_{i=1}^{4} \frac{MB_i}{A_iB_i} = 1$, (1).

Scanned with OKEN Scanner



Vom demonstra prin reducere la absurd.

Presupunem prin absurd $A_iM_i / MB_i > 3 \Rightarrow (A_iB_i - MB_i) / MB_i > 3 \Rightarrow A_iB_i / MB_i > 4 \Rightarrow MB_i / A_iB_i < 1/4$, $(\forall) i \in \{1,2,3,4\}$ și deci $\sum_{i=1}^{4} \frac{MB_i}{A_iB_i} < 1$ ceea ce este în contradicție cu (1).

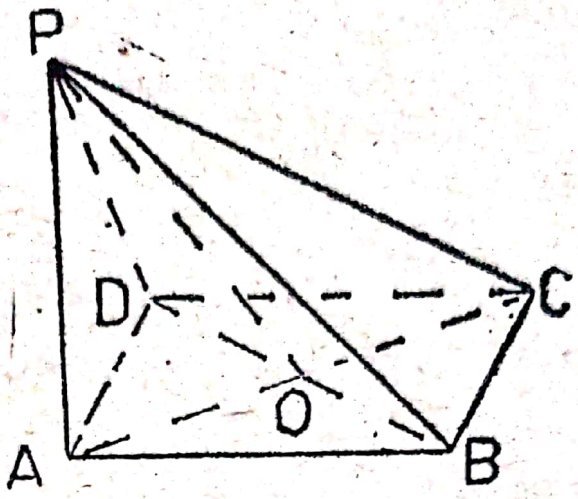
Presupuenm prin absurd $A_iM / MB_i < 3 \Rightarrow (A_iB_i - MB_i) / MB_i < 3 \Rightarrow A_iB_i / MB_i < 4 \Rightarrow MB_i / A_iB_i > 1/4$, $(\forall)\ i \in \{1,2,3,4\}$ și deci $\sum_{i=1}^{4} \frac{MB_i}{A_iB_i} > 1$ ceea ce este, din nou în contradicție cu (1).

S 22. În triunghiul $ABC \Rightarrow AC = 5$, în triunghiul $PAC \Rightarrow PA = \sqrt{11}$.

Avem $V(BCDP) = \frac{1}{3} S(BDC) \cdot PA = 2\sqrt{11}$.

Avem $V(BCDP) = \frac{1}{3} S(BDP)\, d(C,(PBD))$. Din $AO = 5/2$ și $PA = \sqrt{11} \Rightarrow PO = \sqrt{69}/2$ și $S(BPD) = \frac{1}{2} BD \cdot PO = 5\sqrt{69}/4$.

După ultima formulă de volum găsim $d(C,(PBD)) = \frac{24\sqrt{11}}{5\sqrt{69}}$.

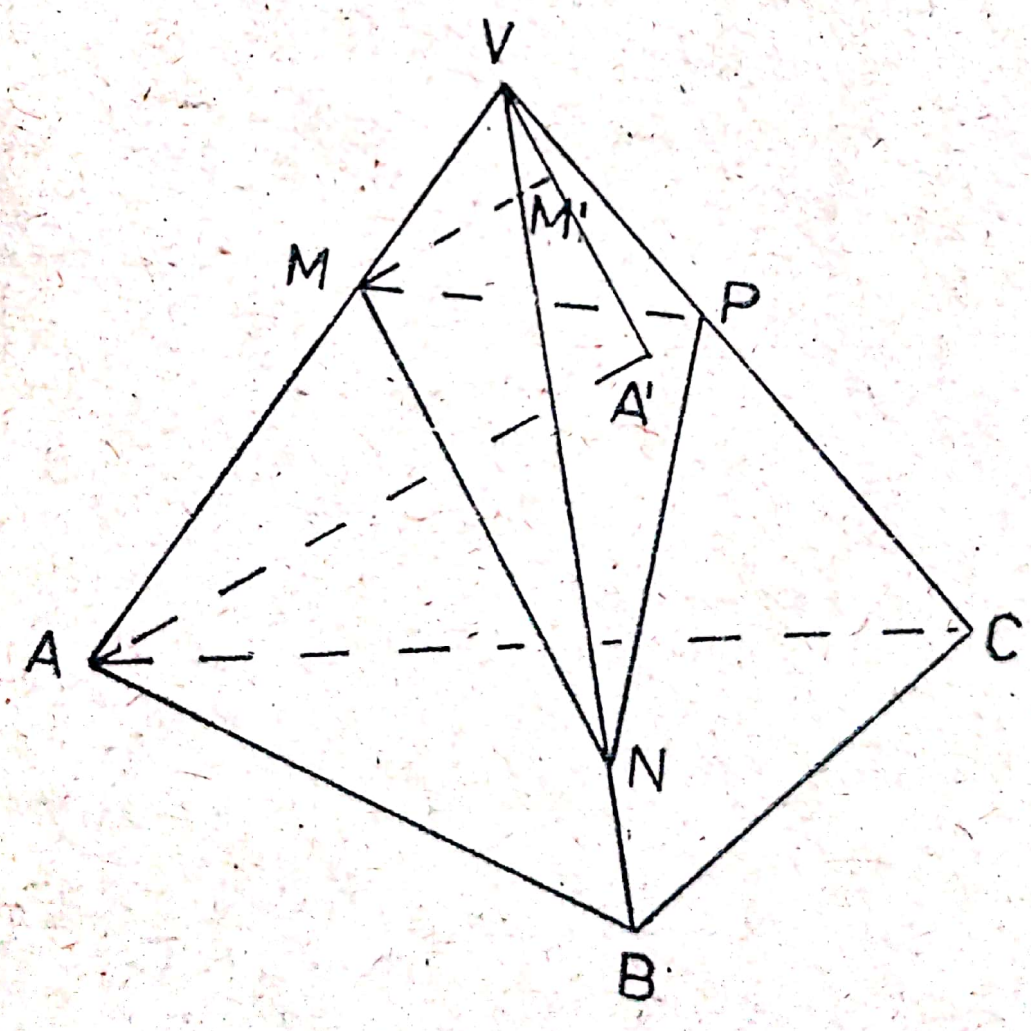


S 23. Fie $AA' \perp (VBC)$ și $MM' \perp (VBC)$.

Evident $\Delta VMM' \sim \Delta VAA' \Rightarrow \frac{VM}{VA} = \frac{MM'}{AA'} \Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{MM'}{AA'}$.

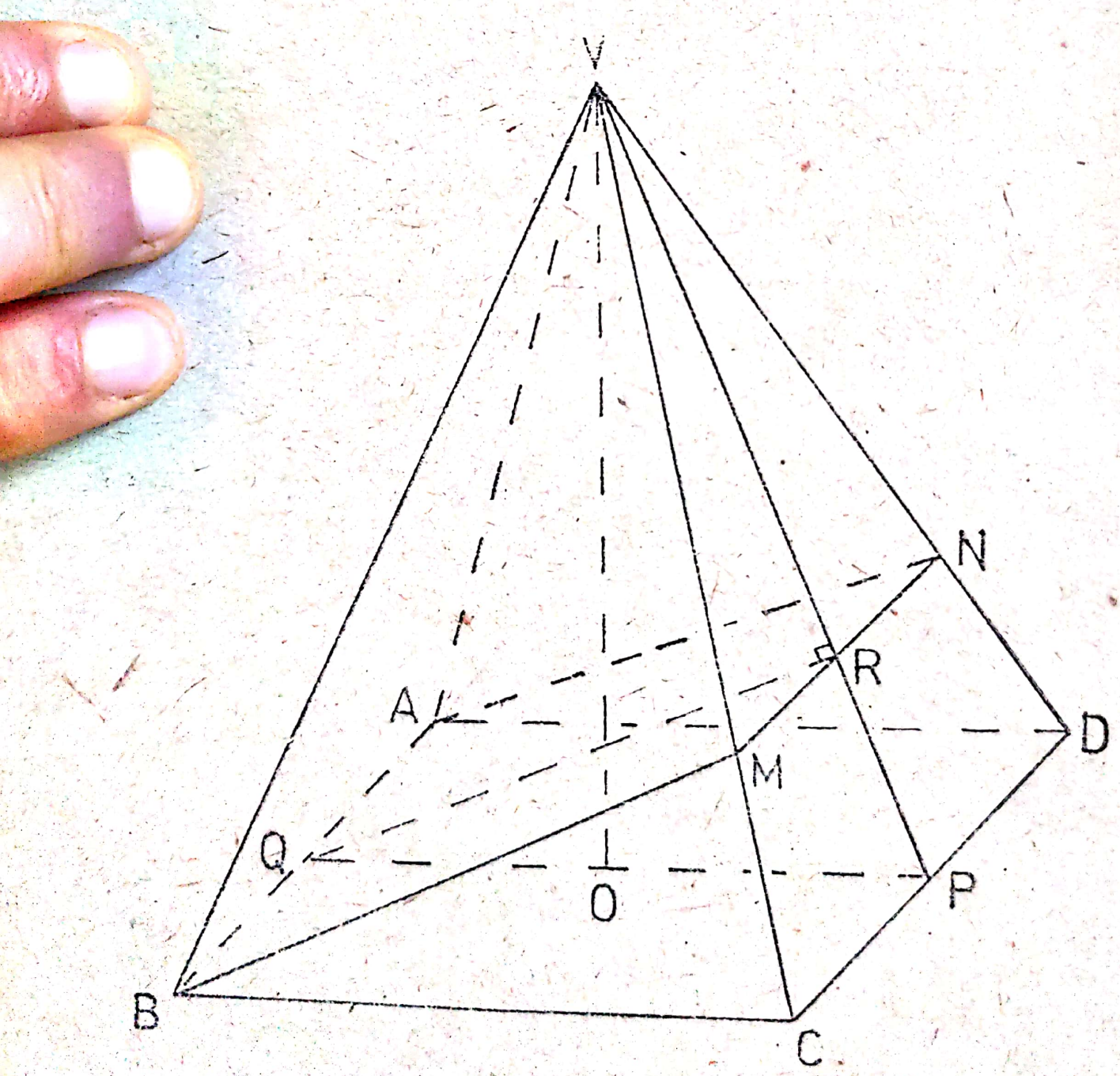
Avem $\frac{V(VMNP)}{V(VABC)} = \frac{S(VNP)\ MM'}{S(BCV)\ AA'} = \frac{VN \cdot VP \sin(BVC)\ MM'}{VB \cdot VC \sin(BVC)\ AA'} =$

$= \frac{mn\ p}{abc}$.



Scanned with OKEN Scanner

S 24. Fie $\alpha = (ABM)$. Din $AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel \alpha$, și dacă $(VCD) \cap \alpha = MN \Rightarrow MN \parallel CD$, $N \in (VD)$. Fie $VP \perp CD$ și $VP \cap MN = \{R\}$. Din $MN \parallel CD$ și $VP \perp CD \Rightarrow VR \perp MN$ și deoarece $(VCD) \perp \alpha \Rightarrow VR \perp \alpha \Rightarrow VR \perp RQ$. În triunghiul $VOP \Rightarrow VP^2 = VO^2 + OP^2 \Rightarrow VP = 5$. În triunghiul VPQ avem $S(VPQ) = \frac{1}{2} PQ \cdot VO = \frac{1}{2} VP \cdot QR \Rightarrow QR = 24/5$. În triunghiul $QPR \Rightarrow RP^2 = QP^2 - QR^2 = 36 - (24/5)^2 = 36 - 23{,}04 = 12{,}96 \Rightarrow RP = 3{,}6 \Rightarrow VR = VP - RP = 5 - 3{,}6 = 1{,}4$. Din asemănarea triunghiurilor VMN și $VCD \Rightarrow \frac{VR}{VP} = \frac{VM}{VC}$, (1).

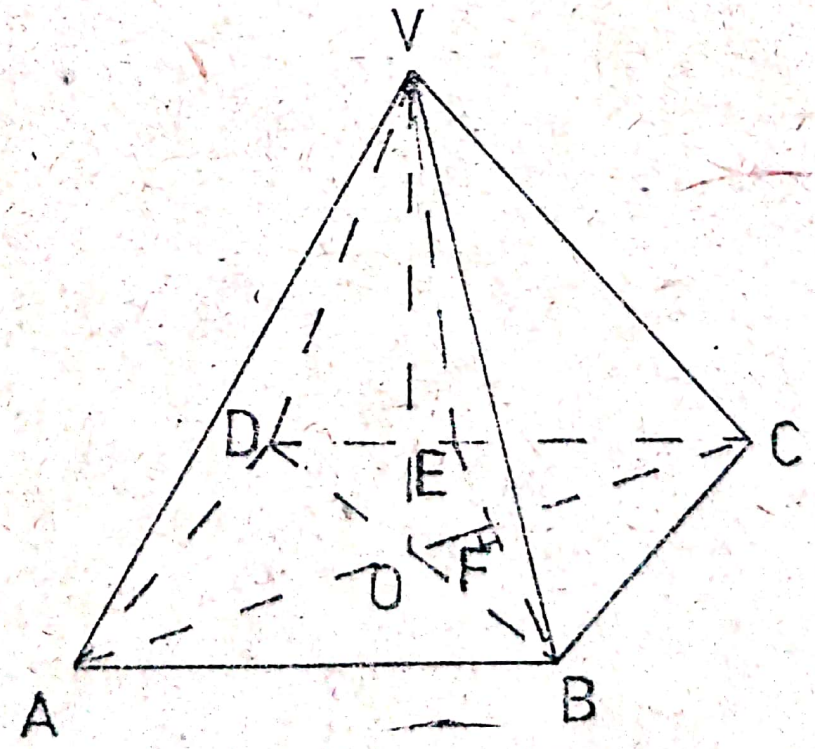


Scanned with OKEN Scanner

În triunghiul $VPC \Rightarrow VC^2 = VP^2 + PC^2 \Rightarrow VC = \sqrt{34}$ și din (1) obținem $VM \simeq 1{,}633$. Avem $V(VABM) = \frac{1}{3} S(ABMN) \cdot VR$, (2). Din asemănarea triunghiurilor VMN și VCD avem: $\frac{VM}{VC} = \frac{VN}{VD} = \frac{MN}{CD} = \frac{VR}{VP}$ de unde $MN = 1{,}68$. Calculăm aria trapezului $ABMN$: $S(ABMN) = (AB + MN) \cdot QR/2 = 92{,}16/5$, și din (2) $\Rightarrow V(VABMN) = \frac{129{,}024}{15} \simeq 8{,}6$. Avem $V(VABCD) = S(ABCD) \cdot VO/3 = 48 \Rightarrow V(ABCDMN) = V(VABCD) - V(VABMN) \simeq 39{,}4$ și deci raportul volumelor celor două corpuri este $8{,}6/39{,}4 \simeq 0{,}2$.

S 25. Fie $AC \cap BE = \{F\}$ și $\alpha = (BVE)$. Din $AC \perp (VBE) \Rightarrow AC \perp BE$. Avem $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$. Aplicînd teorema catetei în triunghiul ABC avem $BC^2 = CF \cdot AC \Rightarrow CF = 9/5$ și în triunghiul dreptunghic $BFC \Rightarrow BF^2 = BC^2 - CF^2 = 9 - 81/25 = 144/25 \Rightarrow BF = 12/5$. Aplicînd teorema înălțimii în triunghiul $BCE \Rightarrow CF^2 = BF \cdot EF \Rightarrow EF = 81/60 = 27/20$. Deci $BE = BF + EF = 15/4$.

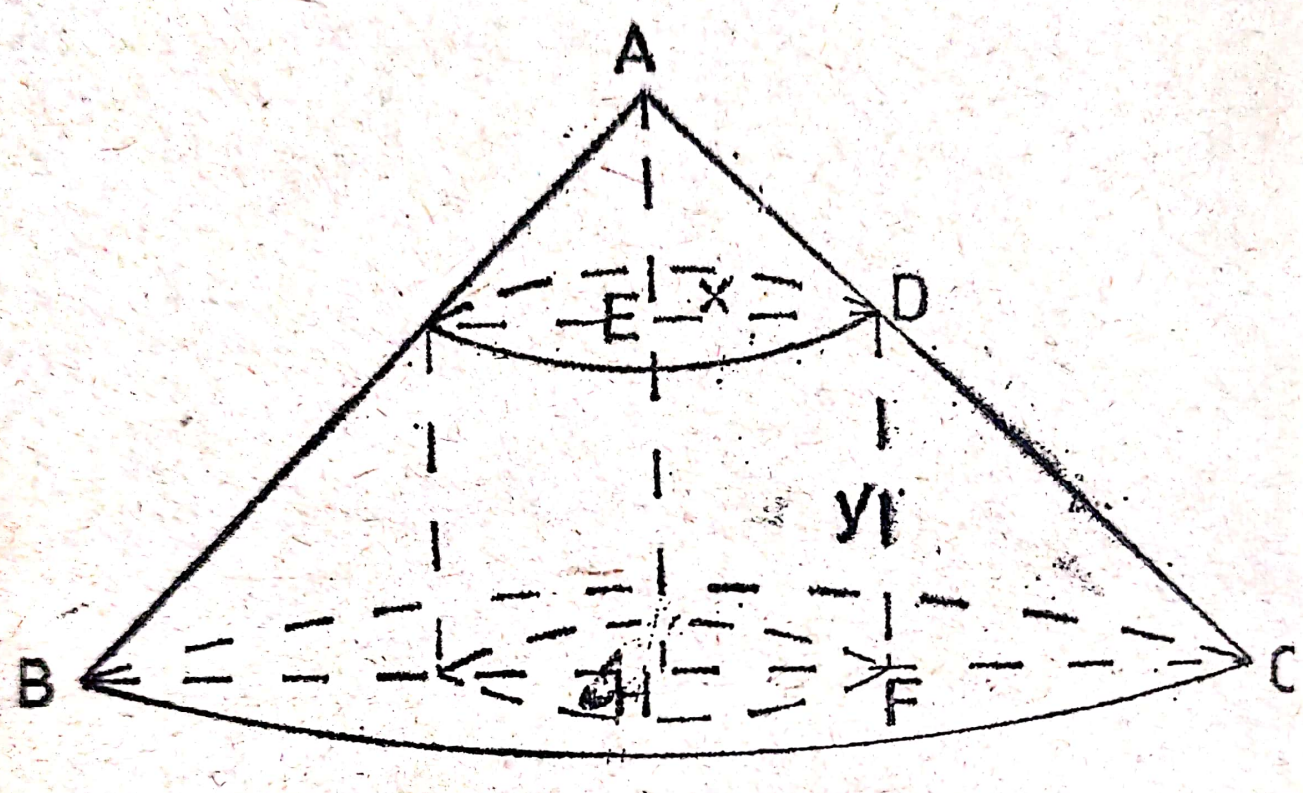
În continuare, $S(BCE) = BE \cdot CF/2 = 27/8$ și $V(VBCE) = \frac{1}{3} S(BCE) \cdot VO = 27/4$.



§ 26. Acceptăm fără demonstrație următoarea:

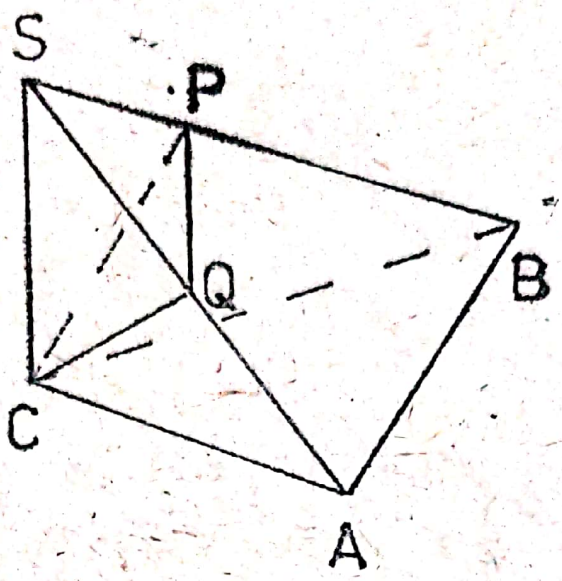
Lemă. Fie x și y două variabile pozitive a căror sumă este constantă, $x + y = l$. Atunci maximumul produsului x^2y se realizează pentru $x = \frac{2l}{3}$ și $y = \frac{l}{3}$.

Trecem acum la rezolvarea problemei.



Fie x raza cilindrului, y înălțimea acestui cilindru și πa^2 aria totală a conului. Deoarece triunghiul AHC este dreptunghic isoscel $AH = HC$. Din motive similare $AE = ED$ și $DF = FC$ și deci $AH = x + y = HC$. În triunghiul AHC, $AC = HC\sqrt{2} = (x + y)\sqrt{2}$ și aplicînd formula ariei totale a unui con avem $\pi a^2 = \pi HC^2 + \pi HC \cdot AC \Rightarrow \pi a^2 = \pi(x + y)^2 + \pi(x + y)^2\sqrt{2}$ de unde $x + y = \frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = \text{const}$. Volumul cilindrului este $V = \pi x^2 y$. Conform lemei maximumul produsului x^2y se realizează cînd $x = \frac{2}{3}\frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$ și $y = \frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$ și deci volumul maxim este $V_{max} = \pi \frac{4}{9}\frac{a^2}{1 + \sqrt{2}}\frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$.

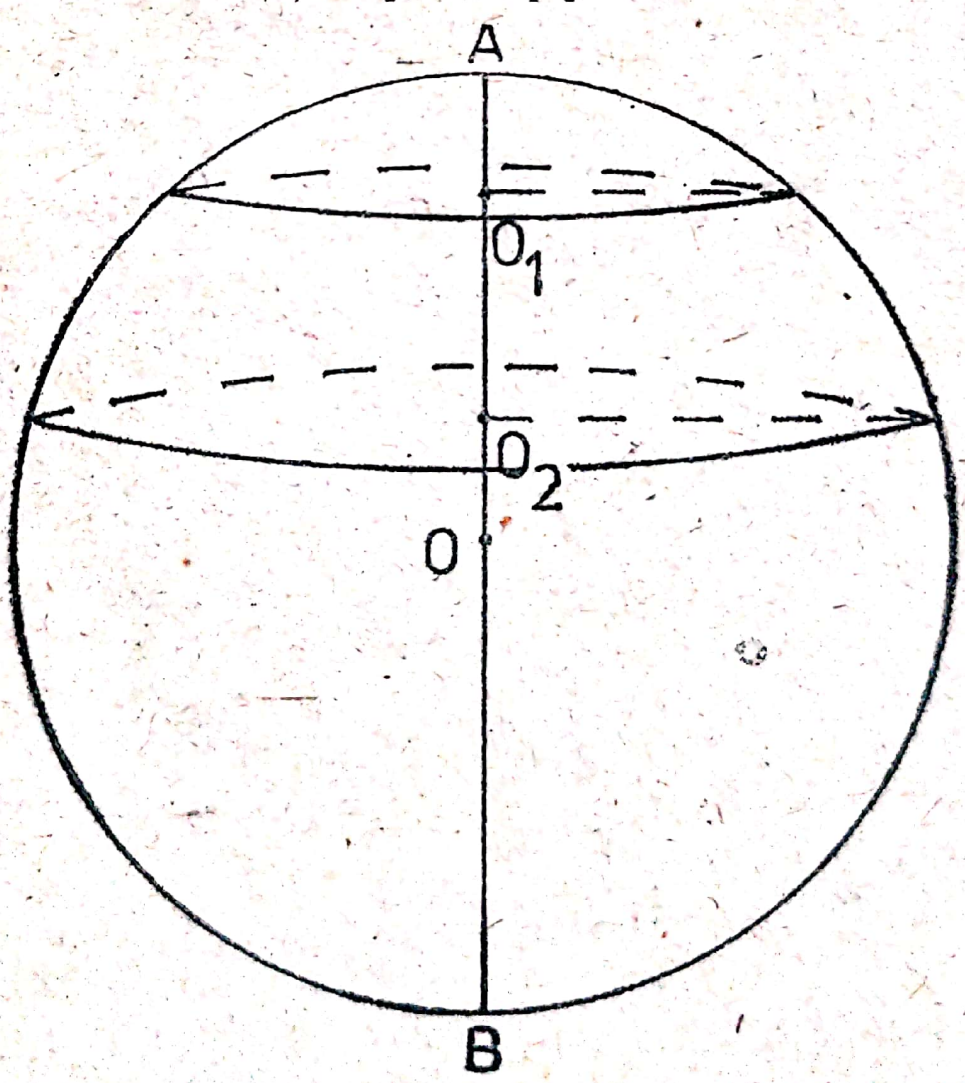
§ 27. Din $SC \perp (ABC)$ și $AC \perp AB$ și teorema celor trei perpendiculare rezultă $SA \perp AB$. Din $AB \perp AC$ și $AB \perp SA \Rightarrow AB \perp (SAC)$ și deci $AB \perp CQ$, (1). În triunghiul dreptunghic isoscel SCA, CQ



este mediană $\Rightarrow CQ$ înălțime $\Rightarrow CQ \perp SA$, (2). Din (1) și (2) rezultă $CQ \perp (SAB)$ și din $CP \perp SB \Rightarrow QP \perp SB$.

Deci în patrulaterul $ABPQ$ unghiurile A și P sînt drepte $\Rightarrow$ $ABPQ$ patrulater inscriptibil.

S 28. Fie R raza sferei și $AO_1 = x$, $O_1O_2 = h$.

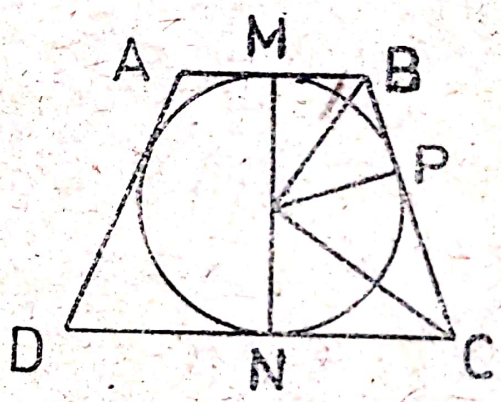


În cercul de diametru AB aplicăm puterea punctului O_1 față de cerc și avem $x(2R - x) = a^2$, (1). Analog, din puterea punctului O_2, avem $(x + h)(2R - x - h) = b^2$, (2). Reamintim că aria zonei este $2\pi Rh$. Înlocuind (1) în (2) avem

$$x = \frac{a^2 - b^2 + 2Rh - h^2}{2h}$$

Înlocuind în prima relație, după calcule, se obține $2Rh = \sqrt{4h^2a^2 + (a^2 - b^2 - h^2)^2}$, de unde, înmulțind cu π rezultă aria zonei $\pi\sqrt{(4h^2a^2 + (a^2 - b^2 - h^2)^2}$.

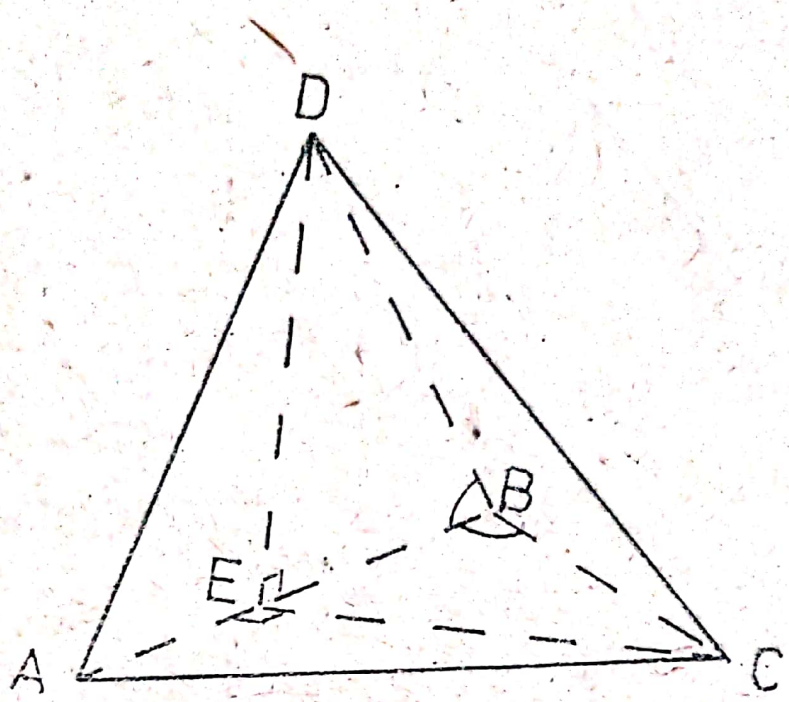
S 29. Fie $OP \perp BC \Rightarrow$ patrulaterele $OPMB$ și $OPCN$ sînt inscriptibile. OB este bisectoarea unghiului $\widehat{MOP}$, OC este bisectoarea unghiului $\widehat{PON}$ și deci, $OB \perp OC$. Cum $MB = BP = x$, $PC = NC = R\sqrt{3}$ tangente duse din același punct) și $\triangle BOC$ este dreptunghic, rezultă $BC^2 = OB^2 + OC^2$ sau $(MB + NC)^2 = OB^2 + OC^2$, (1).



Din triunghiul ONC se obține $OC^2 = R^2 + 3R^2 \Rightarrow OC = 2R$. Din triunghiul OMB se obține $OB^2 = R^2 + x^2$ și înlocuind în (1) avem $(x + R\sqrt{3})^2 = R^2 + x^2 + 4R^2$ de unde $x = R/\sqrt{3}$. Înlocuind în formula ariei laterale a trunchiului de con găsim $\frac{16}{3}\pi R^2$ și din formula volumului trunchiului de con $\frac{26}{9}\pi R^3$.

S 30. a) Triunghiurile ABC și ABD sînt congruente deoarece AB este comună, $BC \equiv BD$ și $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD}$. Fie $CE \perp AB$. Avem $\triangle CBE \equiv \triangle DBE$, deoarece BE este comună, $BC \equiv BD$ și $\widehat{EBC} \equiv \widehat{EBD}$. Deci $m(\widehat{BED}) = 90°$ și din $CE \perp AB$ și $DE \perp AB$ rezultă că unghiul $\widehat{CED}$ este unghiul planelor (ABC) și (ABD). În triunghiul CBE, $\sin 45° = CE / BC \Rightarrow CE = \sqrt{3} = DE$. În triunghiul CED avem

Scanned with OKEN Scanner



$CE^2 + DE^2 = 6 = CD^2$ și deci triunghiul CED este dreptunghic în $E \Rightarrow CE \perp DE$ și deoarece $\widehat{CED}$ era unghiul planelor (ABC) și (ABD) $\Rightarrow (ABC) \perp (ABD)$.

b) Triunghiul CEB este dreptunghic isoscel $\Rightarrow BE = CE = \sqrt{3}$. În triunghiul $CEA \Rightarrow \operatorname{tg} 30° = AE / CE \Rightarrow AE = 1$ și $AC^2 = AE^2 + CE^2 = 4 \Rightarrow AC = 2$ și din congruența triunghiurilor ABC și $ABD \Rightarrow AD = 2$. Aria triunghiului ACD este $S(ACD) = 15/2$. Deoarece $(ABD) \perp (ABC)$ și $DE \perp AB) \Rightarrow DE \perp (ABC) \Rightarrow V(ABCD) = (1/3) S(ABC) \cdot DE = (1+\sqrt{3})/2$, (1). Pe de altă parte $V(ABCD) = (1/3) S(ACD) \cdot d(B, (ACD)) = (1/6)\sqrt{15} \cdot d(B, (ACD))$, (2). Din (1) și (2) avem

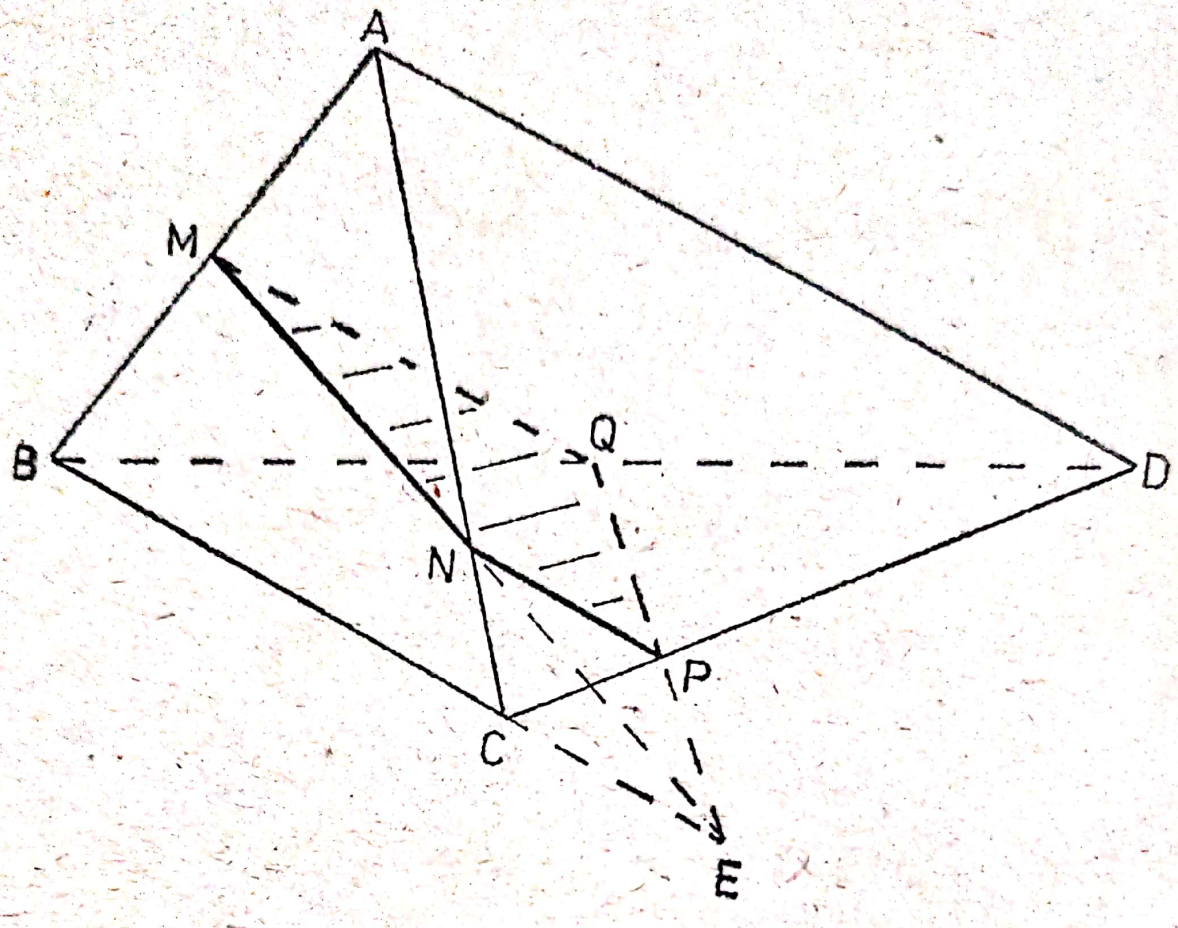
$$d(B, (ACD)) = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

S 31. Fie $MN \cap BC = \{E\}$ și $QE \cap CD = \{P\}$. Secțiunea este $MNPQ$. În triunghiul AMN avem $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 60° = \frac{7}{16}$ de unde $MN = \frac{\sqrt{7}}{4}$, (1). În triunghiul BDA, MQ este linie mijlocie $\Rightarrow MQ = 1/2$, (2). În triunghiul ABC aplicăm teorema lui Menelaus și avem

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{EB}{EC} \cdot \frac{1/4}{3/4} \cdot \frac{1/2}{1/2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{EC+1}{EC} \frac{1}{3} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner



de unde se găsește $EC = 1/2$ și din $EB = EC + 1$ rezultă $EB = 3/2$.
În triunghiul DBC aplicăm teorema lui Menelaus și avem

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QB} = 1 \Rightarrow \frac{3/2}{1/2} \frac{PC}{PD} \frac{1/2}{1/2} = 1 \Rightarrow 3PC = PD$$

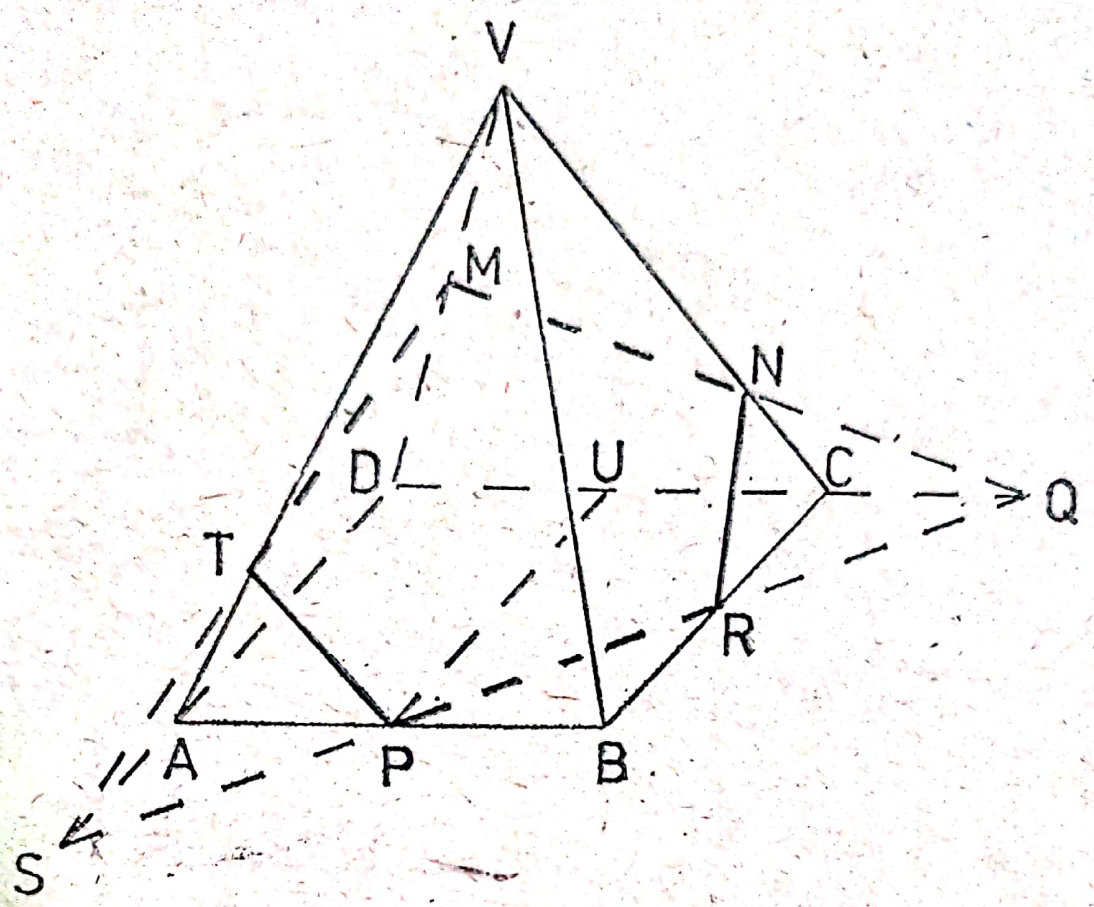
și din $PC + PD = 1 \Rightarrow PC = 1/4$ și $PD = 3/4$.

În triunghiul PCN avem $PC = CN = 1/4$ și deoarece $m(\widehat{ACD}) = 60°$ rezultă că triunghiul PCN este echilateral $\Rightarrow PN = 1/4$, (3). Triunghiurile DQP și AMN sînt congruente deoarece $QD = AM = 1/2$, $PD = AN = 3/4$ și $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{QDP}) = 60°$. Deci $MN \equiv QP$ și deci $QP = \frac{\sqrt{7}}{4}$, (4).

Din (1), (2), (3) și (4) rezultă că

$$\text{Per}(MNPQ) = \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3 + 2\sqrt{7}}{4}.$$

S 32. Din enunț $VM = MD = 1/2$, $VN = 3/4$, $NC = 1/4$, $AP = PB = 1/2$. Fie $MN \cap CD = \{Q\}$, $QP \cap BC = \{R\}$, $QP \cap AD =$



$= \{S\}$, $MS \cap VA = \{T\}$. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul VDC pentru transversala MQ și avem:

$$\frac{QD}{QC} \cdot \frac{NC}{NV} \cdot \frac{MV}{MD} = 1 \Rightarrow \frac{QD}{QC} \cdot \frac{1/4}{3/4} \cdot \frac{1/2}{1/2} = 1 \Rightarrow QD = 3QC \Rightarrow QC +$$

$+ 1 = 3QC \Rightarrow QC = 1/2$ și deci $QD = 1 + 1/2 = 3/2$.

Fie $PU \perp CD \Rightarrow PU = 1$ și $CU = 1/2 \Rightarrow QU = QC + CU = 1/2 +$ $+ 1/2 = 1$. Din asemănarea triunghiurilor QCR și QUP avem:

$$\frac{QC}{QU} = \frac{CR}{PU} = \frac{QR}{QP} \Rightarrow \frac{1/2}{1} = \frac{CR}{1} = \frac{QR}{QP} \Rightarrow CR = 1/2 \text{ și } QP = 2QR.$$

În triunghiul QCR avem $QR^2 = CQ^2 + CR^2 = 1/4 + 1/4 = 1/2$ și deci $QR = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PR = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (1). În triunghiul NCR avem $NR^2 =$

$= NC^2 + CR^2 - 2NC \cdot CR \cdot \cos 60° = \frac{3}{16} \Rightarrow NR = \frac{\sqrt{3}}{4}$, (2). Din $CQ = CR$ rezultă că triunghiul QCR este dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{CQR}) = 45° \Rightarrow$ triunghiul SDQ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow SA = 1/2$. Triunghiurile MDQ și MDS sînt congruente deoarece $DQ = DS = 3/2$, MD este comună și $m(\widehat{MDQ}) = m(\widehat{MDS}) = 60°$ și deci, $MS = MQ$ și $\widehat{MSD} = \widehat{MQD}$. Triunghiurile TAS și NCQ

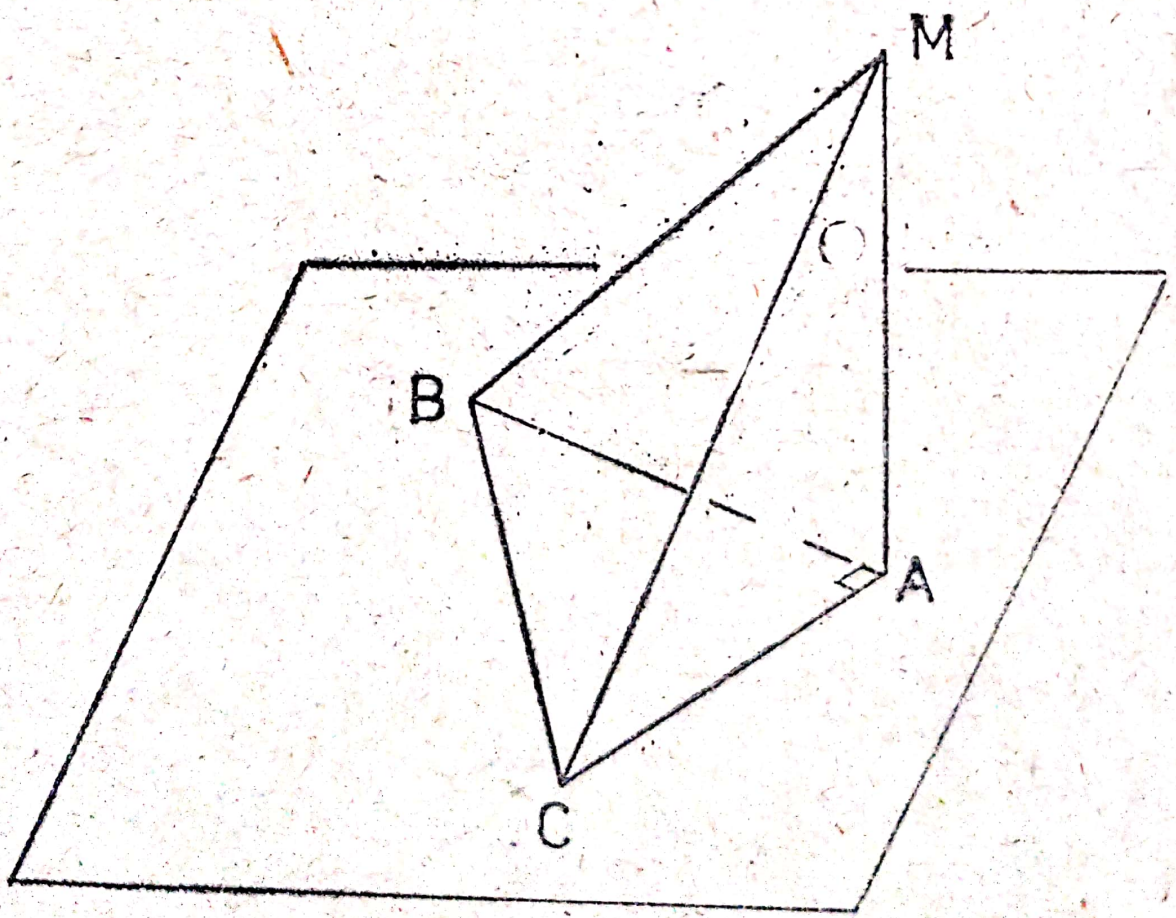
sînt congruente deoarece $AS = CQ = 1/2$, $\widehat{TSA} \equiv \widehat{NQC}$ și $\widehat{TAS} \equiv$ $\equiv \widehat{NCQ}$ (deoarece au suplemente de 60°). Deci $MT = MN$ și $AT = NC$. Avem $\triangle TAP \equiv \triangle NCR$ deoarece $NC \equiv AT$, $AP \equiv CR$ și $\widehat{TAP} \equiv \widehat{NCR}$ de unde rezultă $NR = TP$. În triunghiul VMN avem $MN^2 = VM^2 + VN^2 - 2VM \cdot VN \cdot \cos 60° = \frac{7}{16} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Deci $MN = MT = \frac{\sqrt{7}}{4}$, (3).

Din (1), (2) și (3) avem: Per $(MNRPT) = \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ și deci, în fine

$$\text{Per}\,(MNRPT) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7}).$$

S 33. Se observă că $BC^2 = AB^2 + AC^2$ și deci triunghiul ABC este dreptunghic, cu unghiul drept în A.
În triunghiul AMC avem $MC^2 = x^2 + 3 \Rightarrow MC = \sqrt{x^2 + 3}$. În triunghiul AMB avem $MB^2 = x^2 + 9 \Rightarrow MB = \sqrt{x^2 + 9}$. În triunghiul BMC avem

$$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cdot \cos 60°$$



Scanned with OKEN Scanner

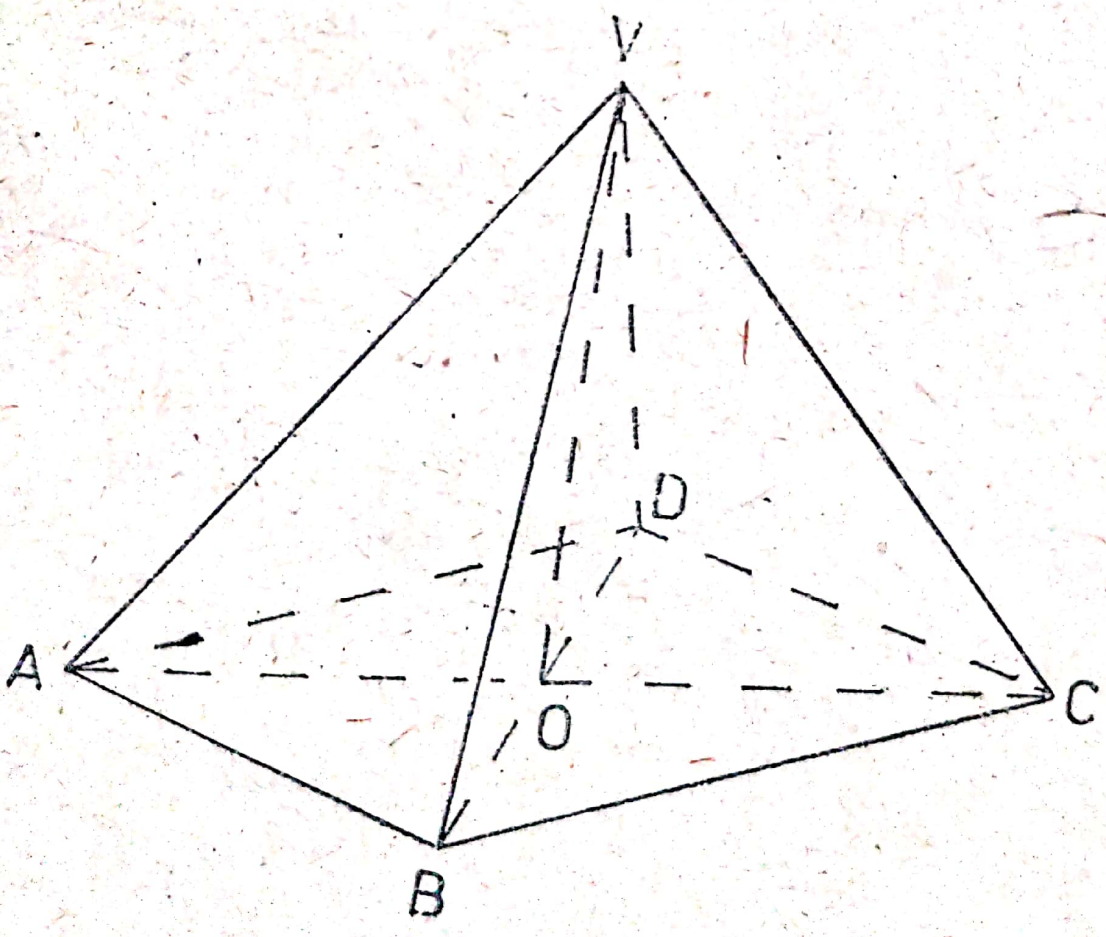
de unde, prin înlocuire, obținem

$$12 = x^2 + 9 + x^2 + 3 - 2\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+3}\cdot\frac{1}{2}$$

adică $2x^2 = \sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+3} \Rightarrow 4x^4 = (x^2+9)(x^2+3)$. Notăm $x^2 = y$, $y > 0$ și avem $4y^2 = (y+9)(y+3) \Rightarrow y^2 - 4y - 9 = 0$ cu singura rădăcină admisibilă $y = 2 + \sqrt{13} \Rightarrow x = \sqrt{2+\sqrt{13}}$. Deoarece prin proiecția unui asemenea unghi pe un plan se obține un unghi mai mare, rezultă că în B și C problema nu este posibilă (din $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ rezultă $m(\widehat{B}) = 30°$, iar din $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ rezultă $m(\widehat{C}) = 60°$).

S 34. a) Avem $V(VABCD) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot VO = 32$.

b) Din triunghiul dreptunghic VOC deducem $VC^2 = VO^2 + OC^2 = 32$ și deci $VC = 4\sqrt{2}$. La fel din triunghiul dreptunghic VOB deducem $VB = 5$ și deci $AV = VC = 4\sqrt{2}$ și $VB = VD = 5$.



c) Avînd în vedere că laturile VO și OC sînt egale ($VO = OC = 4$) și cum unghiul VOC este drept urmează că $m(\widehat{OVC}) = m(\widehat{VCO}) = 45°$. La fel $m(\widehat{OAV}) = m(\widehat{AVO}) = 45°$ și deci $m(\widehat{AVC}) = 90°$ adică $AV \perp CV$.

S 35. Fie $VA = a$, $VB = b$, $VC = c$ și $VD \perp AB$, $VE \perp BC$, $VF \perp AC$. În triunghiul $VAB \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. Exprimînd aria triunghiului VAB în două moduri, adică $S(VAB) = \frac{1}{2} \cdot VA \cdot VB = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot VD$ obținem

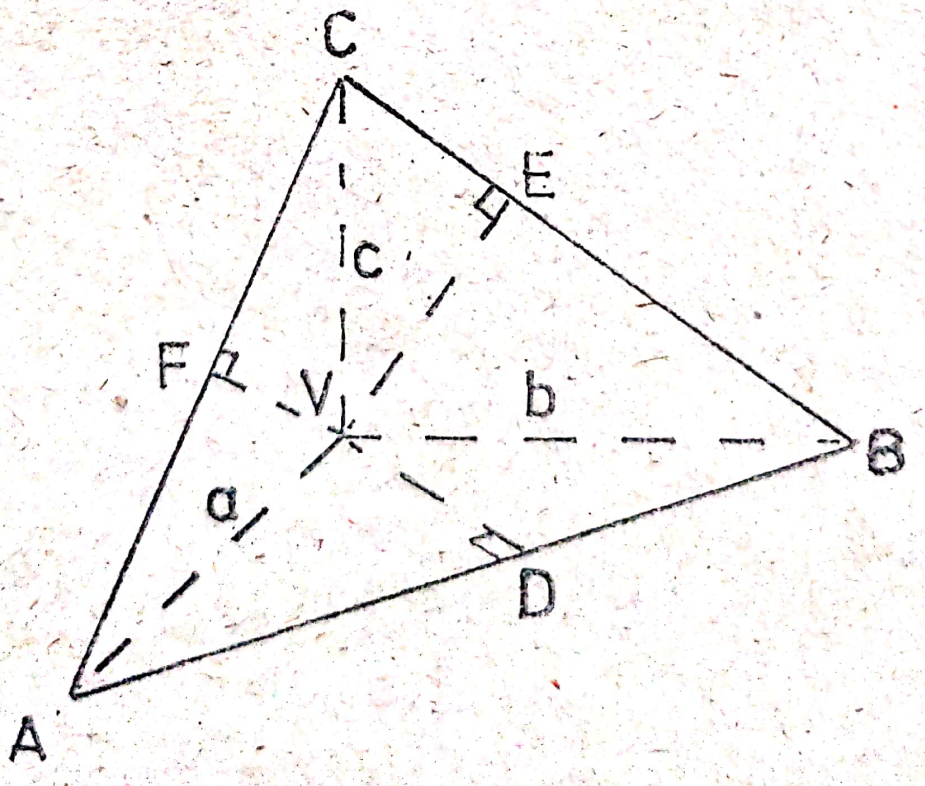
$$VD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ și analog } VE = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad VF = \frac{ca}{\sqrt{c^2 + a^2}}$$

Relația din enunț este echivalentă cu

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{ca}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}\right), \qquad (1).$$

Avem

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2ab - a^2 - b^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{(a - b)^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant 0$$



Scanned with OKEN Scanner

și deci

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}, \quad (2), \quad \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}, \quad (3) \text{ și}$$

$$\frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2}, \quad (4).$$

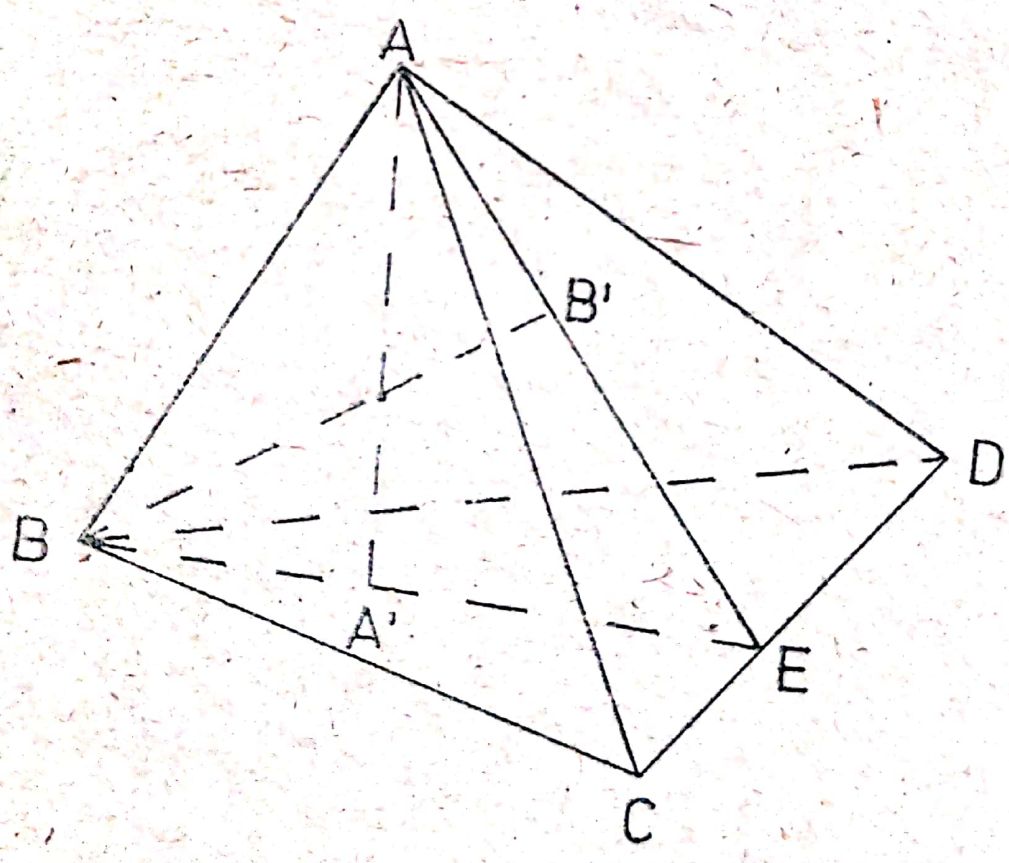
Adunînd relațiile (2), (3) și (4) obținem (1).

Se știe că dacă $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, $z \leqslant c$ și $x+y+z = a+b+c$ atunci $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Aplicînd acest fapt problemei noastre rezultă că egalitatea se realizează dacă și numai dacă $a = b = c$.

S 36. Fie $\alpha = (AA', BB')$ și $CD \cap \alpha = \{E\}$.

Din $CD \perp BB'$ și $CD \perp AA' \Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AB$, (1). Fie $CC' \perp (ABD) \Rightarrow CC' \perp AB$, (2). Fie $DD' \perp (ABC) \Rightarrow DD' \perp AB$, (3). Din (1), (2), (3) și unicitatea planului care conține o dreaptă și este perpendicular pe o altă dreaptă rezultă CC', DD' și CD sînt coplanare.

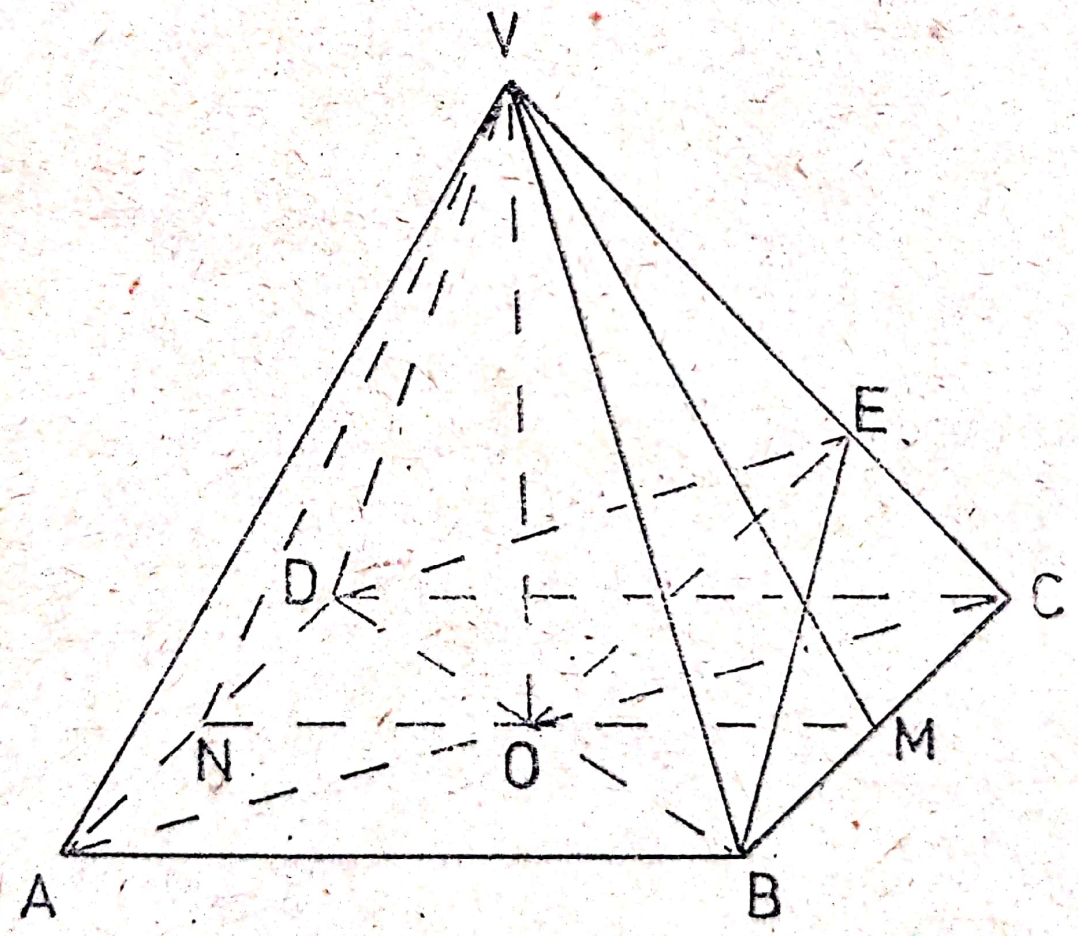


b) Din $BE \perp CD \Rightarrow BC^2 - BD^2 = CE^2 - DE^2$ (a se vedea și problema P 18). Din $AE \perp CD \Rightarrow AC^2 - AD^2 = CE^2 - DE^2$. Deci $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 \Rightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

Scanned with OKEN Scanner

S 37. Fie $BE \perp VC$, $VM \perp BC$, $VN \perp AD$. Se verifică ușor că $\widehat{MVN}$ este unghiul planelor (VBC) și (VAD).

Avem $\triangle BCE \equiv \triangle DCE$ deoarece CE este comună, $BC \equiv CD$ și $\widehat{ECB} \equiv \widehat{ECD}$. Deci $m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{DEC}) = 90°$ și $BE = DE$. Din $BE \perp VC$ și $DE \perp VC$ rezultă că unghiul $\widehat{BED}$ este unghiul planelor (VBC) și (VDC). Din enunț $m(\widehat{BED}) = 120°$. Din $BE \equiv DE$ rezultă că triunghiul BED este isoscel și, deoarece O este mijlocul lui BD, avem $OE \perp BD$ și $m(\widehat{EBO}) = 30°$. Fie a latura pătratului $ABCD$. În triunghiul EOB avem $\cos \widehat{EBO} = OB/BE \Rightarrow \cos 30° = OB/BE$. Deoarece $\cos 30° = \sqrt{3}/2$ și $OB = a\sqrt{2}/2$ obținem $BE = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. În



$\triangle BCE$, $\sin \widehat{BCE} = BE/BC \Rightarrow \sin \widehat{BCE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \widehat{BCE} =$

$= \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{BCE}} = \sqrt{3}/3$. În $\triangle MCV$ avem $\operatorname{tg} \widehat{VCM} = VM/MC \Rightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

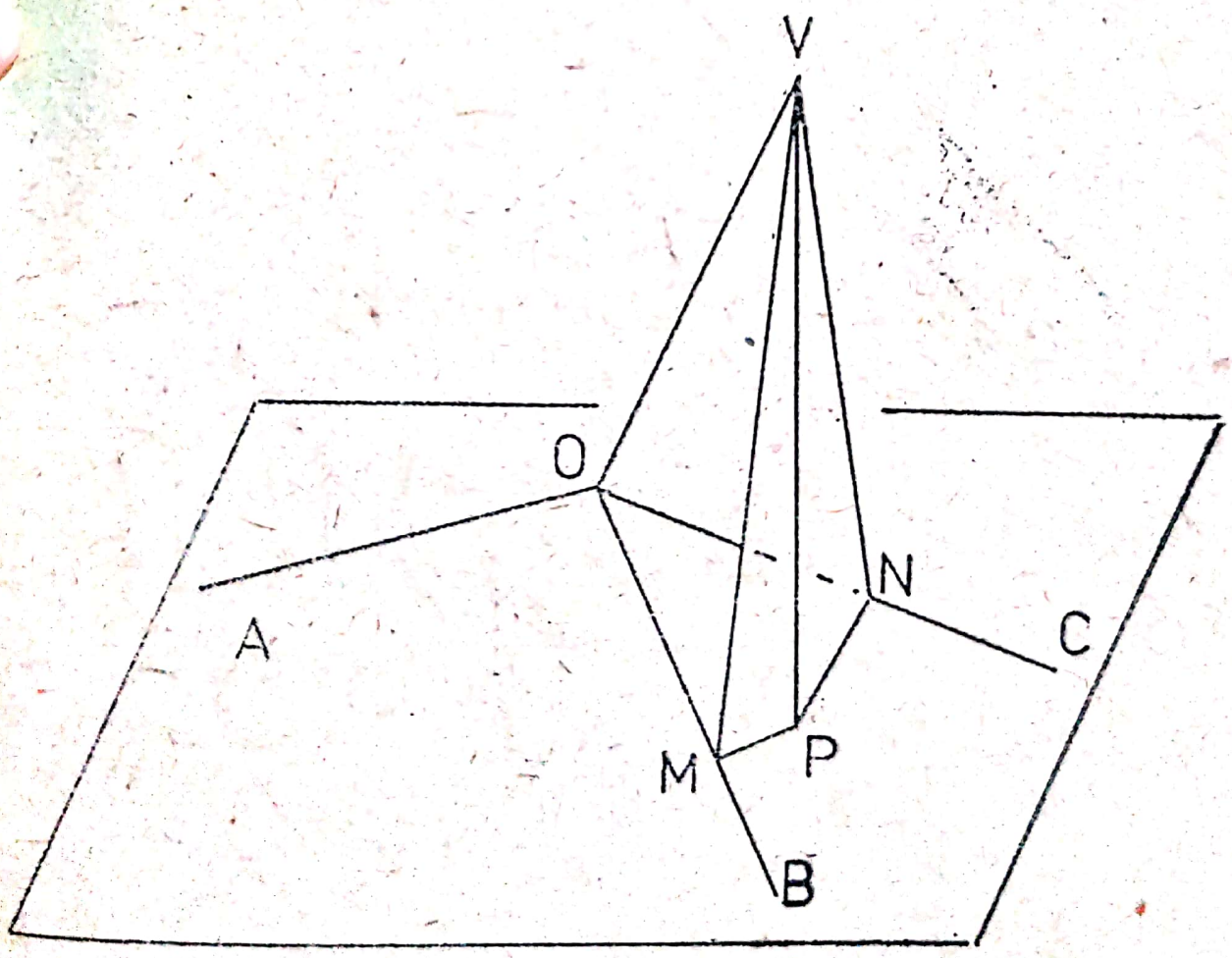
$\Rightarrow \dfrac{\sin \widehat{VCM}}{\cos \widehat{VCM}} = \dfrac{VM}{a/2} \Rightarrow VM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. În $\triangle VOM$, $\cos \widehat{VMO} = OM/VM = \sqrt{2}/2 \Rightarrow m(\widehat{VMO}) = 45°$.

Deci în triunghiul VNM unghiurile VMN și VNM au măsura 45° $m(\widehat{NVM}) = 90°$ adică planele (VBC) și (VAD) sînt perpendiculare.

S 38. Fie $VP \perp \alpha$, $PM \perp OB$, $PN \perp OC$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $VM \perp OB$ și $VN \perp OC$.

Avem $\triangle VOM \equiv \triangle VON$ deoarece VO este comună, $\widehat{VOM} \equiv \widehat{VON}$ și sînt triunghiuri dreptunghice. Deci $VM \equiv VN$. Avem $\triangle VMP \equiv \triangle VNP$ deoarece VP este comună, $VM \equiv VN$ și sînt dreptunghice. Deci $MP \equiv PN$ de unde rezultă că P aparține bisectoarei unghiului $\widehat{COB}$ sau coincide cu O.

Analog P aparține bisectoarei unghiului $\widehat{AOB}$ sau coincide cu O. Cum P nu poate aparține la două bisectoare de unghiuri adiacente rezultă $P = O \Rightarrow VO \perp \alpha$.



Scanned with OKEN Scanner

S 39. Fie $AE \perp (BCD)$, $EM \perp CD$, $EN \perp BD$. Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $AM \perp CD$ și $AN \perp BD$.

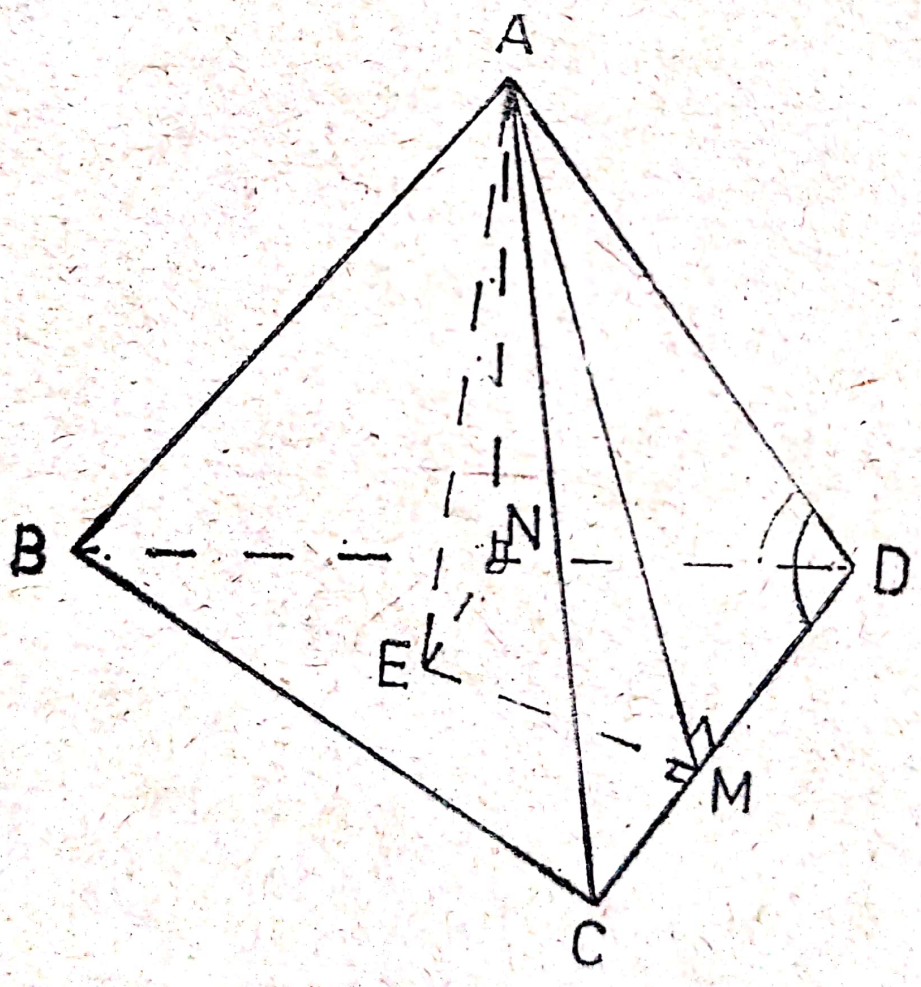
Din $BC \perp AE$ și $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (AED) \Rightarrow BC \perp ED$ adică ED este înălțime a triunghiului BCD.

Avem $\triangle ADM \equiv \triangle ADN$ deoarece AD este comună, $\widehat{ADM} \equiv \widehat{ADN}$ și sînt triunghiuri dreptunghice. Deci $AM \equiv AN$.

De asemenea $\triangle AEM \equiv \triangle AEN$ deoarece $AM \equiv AN$, AE este comună și sînt triunghiuri dreptunghice. Deci $EM \equiv EN$ de unde rezultă că ED este bisectoarea unghiului $\widehat{BDC}$.

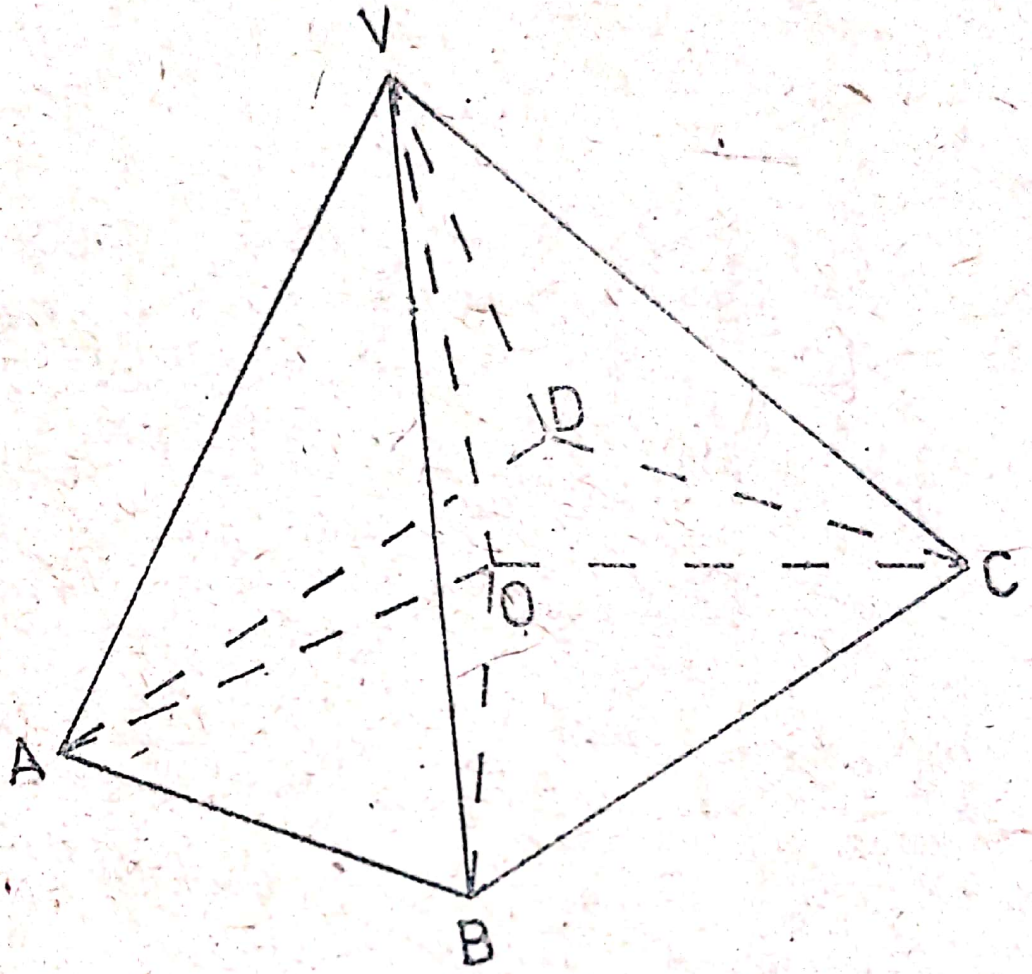
Din ED înălțime și bisectoare în triunghiul BDC rezultă că triunghiul BDC este isoscel $\Rightarrow BD \equiv CD$.

Avem $\triangle ACD \equiv \triangle ABD$ deoarece $BD \equiv CD$, AD este latură comună și $\widehat{ACD} = \widehat{ADB}$. Rămîne că $AB \equiv AC$.



S 40. Presupunem că există o astfel de piramidă. Dacă în rombul $ABCD$ unghiul ascuțit are 60°, atunci celălalt unghi are 120°.

Fie $VO \perp (ABCD)$. Deoarece muchiile VA, VB, VC sînt congruente rezultă că triunghiurile VAO, BVO, VCO sînt congruente și deci



$AO = BO = CO$, adică O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Avem $\triangle AOB \equiv \triangle BOC$ deoarece $AO \equiv OC$, BO comună și $AB \equiv BC$. Deoarece $m(\widehat{ABC}) = 120°$ și $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{CBO})$ rezultă $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{CBO}) = 60°$. Deci triunghiurile isoscele AOB și BOC au un unghi de $60°$ de unde rezultă că ele sînt echilaterale.

Deci $m(\widehat{OAB}) = 60°$ și din $m(\widehat{DAB}) = 60°$ rezultă $O \in AD$. Analog $O \in DC$ și deci $O = D$. Din $VO \perp (ABCD) \Rightarrow VD \perp (ABCD)$. Dar acest fapt este imposibil deoarece în triunghiul VDC am avea ipotenuza $VC = a$ și cateta $DC = a$.

Rămîne că premiza este falsă, adică nu există piramide cu proprietatea enunțată.

Scanned with OKEN Scanner

SUBIECTELE CONCURSURILOR DE ADMITERE ÎN LICEE — 1990

I — Sesiunea iulie — REAL

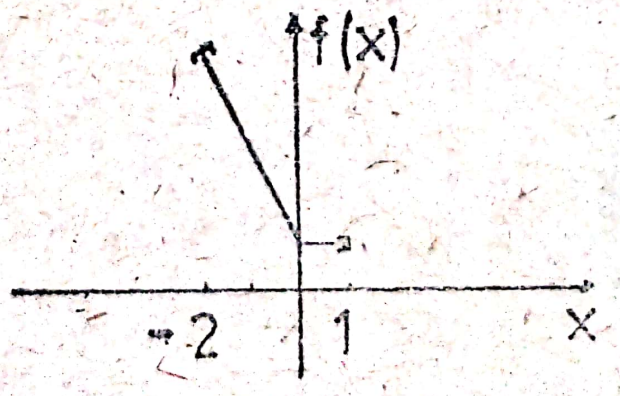
1. a) $A = 3$.

b) Condiție $x \neq 2$. Ecuația devine $mx = 3m - 1$. Pentru $m \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \dfrac{3m-1}{m}$ și din $x \neq 2 \Rightarrow m \neq 1$. Deci pentru $m \neq 0$ și $m \neq 1 \Rightarrow x = (3m-1)/m$. Pentru $m = 0$ ecuația devine $\dfrac{-1}{x-2} = 0$ ceea ce este imposibil. Pentru $m = 1$ ecuația devine $0 = 1$ ceea ce este absurd.

c) Avem $P(1+x) = 1 + 2x + x^2 + a + ax + 1$ și $P(1-x) = 1 - 2x + x^2 + a - ax + 1$ de unde $4x + 2ax = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = -2$.

2. a) Avem $x^2 \leftarrow |x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ -x \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$, $|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ dacă } x \geqslant 1 \\ 1-x \text{ dacă } x < 1 \end{cases}$

Obținem $f(x) = \begin{cases} 1-2x \text{ dacă } -2 \leqslant x < 0 \\ 1 \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$. Graficul este:

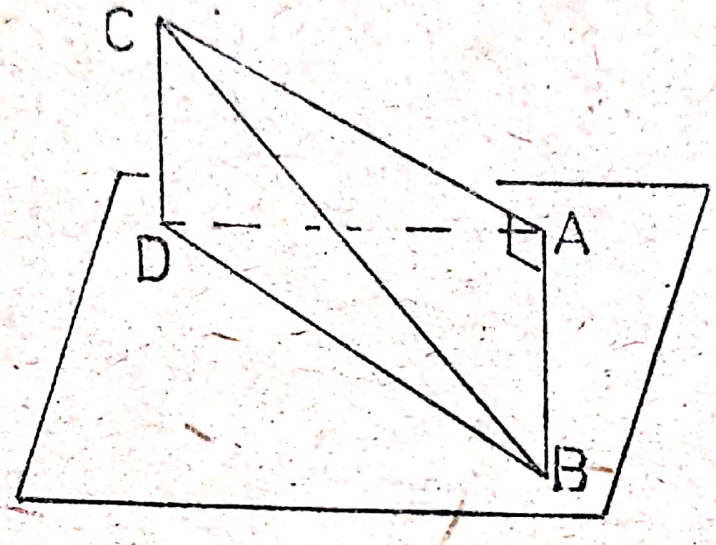


Scanned with OKEN Scanner

b) Condiții rezultate din enunț: $1-2a>0$, $4-a>0$ și $(1-2a)(4-a)=30$. Se obține $a=-2$.

c) Dacă a este muchia cubului $\Rightarrow$ diagonala este $a\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 3 \Rightarrow a=\sqrt{3}$ și volumul cubului este $3\sqrt{3}$.

3. a) Aplicînd teorema lui Pitagora obținem $AD^2=b^2-h^2$, $BD^2=b^2+c^2-h^2$.



b) Din $AB\perp AC$ și $AB\perp CD$ rezultă $AB\perp(ACD)\Rightarrow AB\perp AD$. Avem $\operatorname{tg}\widehat{ABC}=b/c$ și $\operatorname{tg}\widehat{ABD}=AD/c=\sqrt{b^2-h^2}/c<b/c=\operatorname{tg}\widehat{ABC}\Rightarrow\widehat{ABD}<\widehat{ABC}$. Obținem $S(ABD)=ADc/2=\sqrt{b^2-h^2}\cdot c/2$ și $V(CABD)=\frac{1}{6}ch\sqrt{b^2-h^2}$.

c) $S(ABC)=bc/2$, $S(ABD)=\sqrt{b^2-h^2}\cdot c/2$ și condiția din enunț devine $b=2\sqrt{b^2-h^2}$ adică $h=b\sqrt{3}/2\Rightarrow\sin\widehat{CAD}=h/b=\sqrt{3}/2\Rightarrow m(\widehat{CAD})=60°$.

II — Sesiunea iulie — UMAN

1. a) $A=2$, $B=2$, $A-B=0$.

b) Inecuația devine $3x\geq 18\Leftrightarrow x\in[6,\infty)$.

c) Ecuația devine $5x^2-27x+10=0\Rightarrow x_1=5$ și $x_2=2/5$.

2. a) Putem scrie $P(X)=(X^2+1)[(X^2+1)^2-2]+1990$ și deci cîtul este X^4+2X^2-1 iar restul 1990.

b) Notăm $X^2+X=Y\Rightarrow\dfrac{Y(Y+1)-2}{Y(Y+3)+2}=\dfrac{(Y-1)(Y+2)}{(Y+1)(Y+2)}=\dfrac{X^2+X-1}{X^2+X+1}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$.

Avem $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}=$

$=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2+2+2=6$. Egalitate pentru $a=b=c$.

3. a) Avem $AC=CD'=AD'=a\sqrt{2}$. Înălțimea triunghiului echilateral ACD' este $a\sqrt{6}/2$ și $S(ACD')=a^2\sqrt{3}/2$.

b) $DACD'$ este piramidă regulată cu muchia laterală $DA=a$, dar poate fi considerată și cu baza DAC și înălțimea $DD'=a$. Rezultă volumul $a^3/6$.

c) Scriind volumul piramidei $DACD'$ în două moduri, prima distanță rezultă $a\sqrt{3}/3$. Analog pentru piramida $DBA'C'$ și a doua distanță este $2a\sqrt{3}/3$.

III Sesiunea septembrie — complexitate A

1. a) Tabloul de semn este

x		2		5	
$2x-4$	$-$	0	$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$(2x-4)(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Deci $x\in[2,5]$.

b) Scăzînd prima ecuație din ultima se obține sistemul echivalent

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+2y+3 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

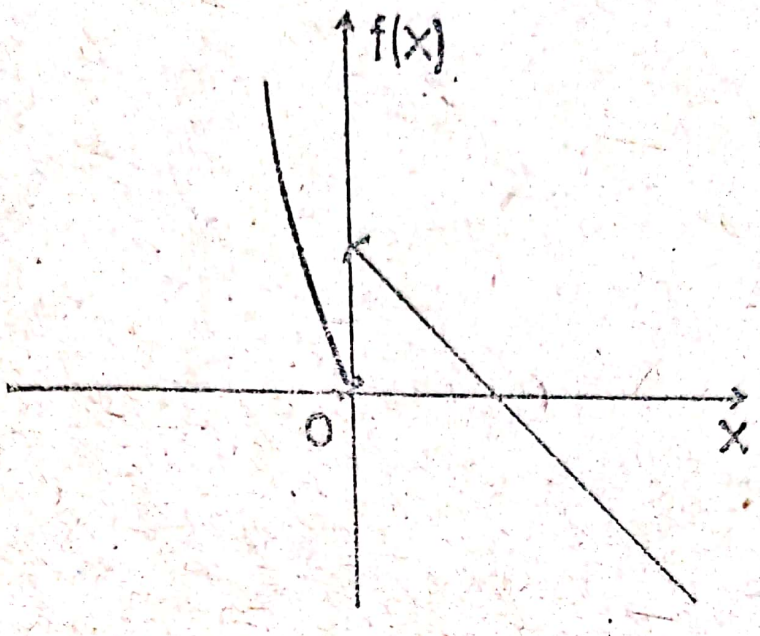
Scăzînd acum prima ecuație din a doua obținem sistemul echivalent $x+y=2$, $y=1$, $z=2$ de unde $x=1$, $y=1$, $z=2$.

2. a) Tabloul de valori

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	12	3	0	2	1

Graficul este:

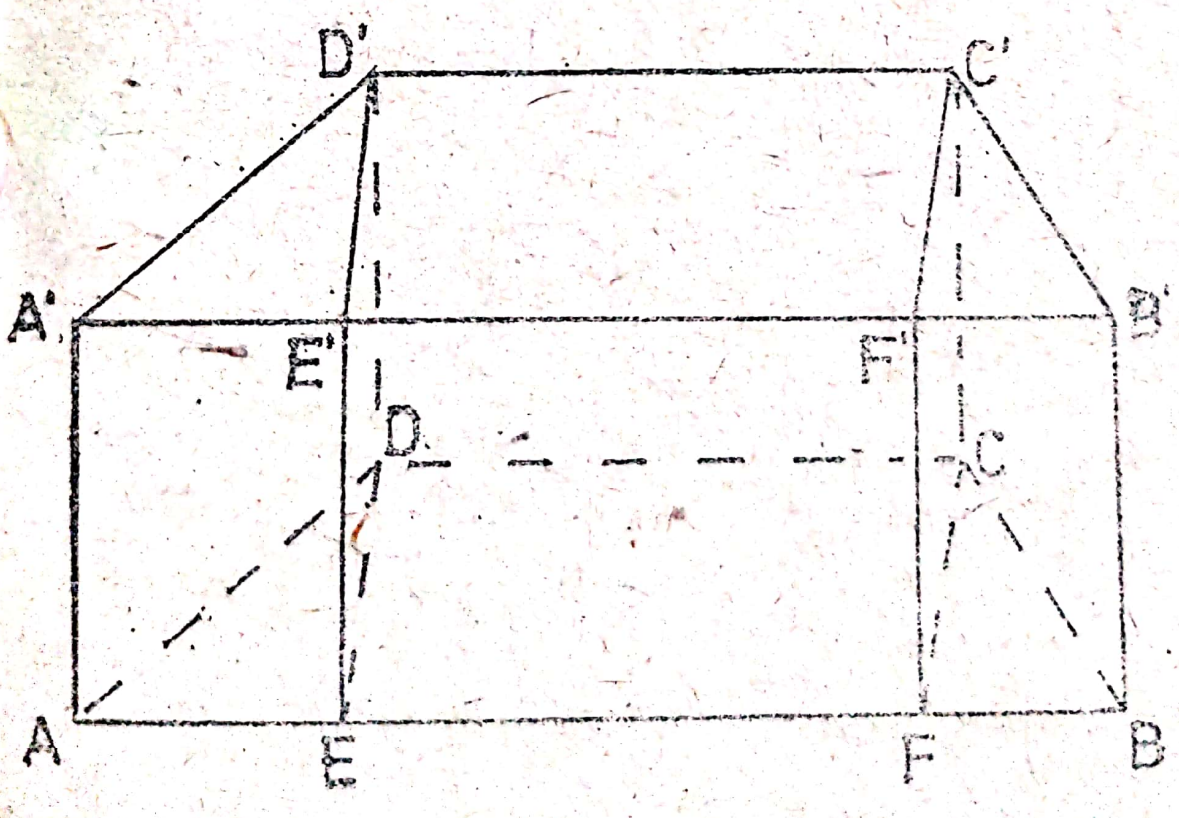
Scanned with OKEN Scanner



b) După calcule $P(a-1) = a^3 - 6a^2 + 11a - 6$ și din condiție rezultă $a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = 2$.

c) Condiție echivalentă $P(1) = 0$ care se verifică imediat.

3. Se obțin două prisme triunghiulare drepte și un paralelipiped dreptunghic. În $\triangle CFB \Rightarrow BF = 12 \Rightarrow AE = 5$. În $\triangle AED \Rightarrow AD = 5\sqrt{2}$.



Avem $S(BFC) = BF \cdot CF/2 = 30$ și obținem: $S_{tot}(AEDA'E'D') = 25(5 + 2\sqrt{2})$ cm², $S_{tot}(FBCF'B'C') = 360$ cm² și $S_{tot}(EFCDE'F'C'D') = 340$ cm², și volumele $V(FBCF'B'C') = 300$ cm³, $V(AEDA'E'D') = 125$ cm³ și $V(EFCDE'F'C'D') = 400$ cm³.

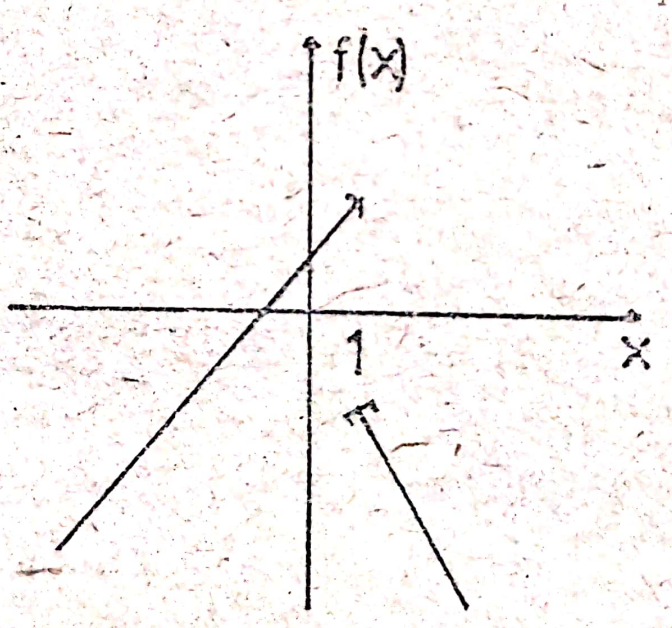
IV — Sesiunea septembrie — complexitate B

1. a) $A = 51$. b) $x = 9/2$. c) $x = 1$ și $y = 1$.

2. a) Tabloul de valori

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	-2	-4

Graficul este:



b) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x}{x^3 - x} = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-2}{x+1}$.

c) $P(1) = 0$.

3. a) $AC = 5$ și $AC' = 13$. b) $S_{tot} = 192$ și volumul 144.

c) Exprimînd în două moduri aria triunghiului ACC' găsim $CI = \dfrac{60}{13}$.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Gazeta matematică 1960—1989.
2. F.G.M. — „Exercices de geometrie"
3. Hadamard Jacques, „Lecţii de géométrie elementară — geometrie în spaţiu", Editura Tehnică, Bucureşti, 1961.
4. Pimsner Mihai şi Popa Sorin, „Probleme de geometrie elementară", Centrul de multiplicare al Universităţii, Bucureşti 1976.

CUPRINS

Prefață 3
Indice de autori 5

Partea întîia — Enunțuri

1. Algebră (A) 7
2. Geometrie plană (P) 16
3. Geometrie în spațiu (S) 21
4. Subiectele date la concursurile de admitere 1990 26

Partea a doua — Soluții

1. Algebră (A) 29
2. Geometrie plană (P) 71
3. Geometrie în spațiu (S) 93
4. Subiectele date la concursurile de admitere 1990 130

Bibliografie 135

Redactor : AD. ANDREI
Tehnoredactor : MARIN RĂD[illegible]ESCU

Coli tipo 8,5, tiraj 30.000 exemplare,
Format 16/70×100

Tiparul executat sub comanda nr. 310
la I.P. „Filaret", str. Fabrica de chibrituri
nr. 9—11, București
România